Ultraproduits et applications

Akash Hossain

Etant donné une famille $(\mathcal{M}_i)_i$ de structures, on peut construire l'ultraproduit des $\mathcal{M}_i$, noté $\lim\limits_{i} \mathcal{M}_i$, qui peut être vu comme la "limite asymptotique" des $\mathcal{M}_i$.

1. Ultrafiltres
2. Logique du premier ordre
3. Ultraproduits
4. Applications

Soit I un ensemble infini, et $\mathbb{U} \subset \mathcal{P}(I)$.
Pour tout $X \subset I$, on veut que X soit "grand" quand $X \in \mathbb{U}$, et "petit" quand $X \notin \mathbb{U}$.

Définition ensembliste

Définition : On dit que $\mathbb{U}$ est un **ultrafiltre non-principal** sur I quand, pour tout $X, Y \subset I$:

- $\emptyset \notin \mathbb{U}$
- $X \in \mathbb{U} \iff X^c \notin \mathbb{U}$
- si $X \in \mathbb{U}$, et $Y \supset X$, alors $Y \in \mathbb{U}$
- si X est fini, alors $X \notin \mathbb{U}$
- si $X \notin \mathbb{U}$, et $Y \notin \mathbb{U}$, alors $X \cup Y \notin \mathbb{U}$

Définition probabiliste

Théorème : $\mathbb{U}$ est un ultrafiltre non-principal sur I si et seulement si $\mathbb{1}_{\mathbb{U}} : \mathcal{P}(I) \longrightarrow \{0,1\}$ est une mesure de probabilité finiment additive et pas Dirac.

Remarque : On utilise l'expression standard "presque partout sur I" pour parler d'un grand sous-ensemble de I.

Définition algébrique

Soit $\mathbb{1}$ la bijection canonique $\mathcal{P}(I) \longrightarrow \{0,1\}^I$.

On identifie $\{0,1\}^I$ avec l'anneau produit $\left({}^{\mathbb{Z}}/_{2\mathbb{Z}}\right)^I$.

Théorème : Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathbb{U}$ est un ultrafiltre non-principal sur I
2. $\mathbb{1}\left(\{X^c | X \in \mathbb{U}\}\right)$ est un idéal maximal non-principal de $\left({}^{\mathbb{Z}}/_{2\mathbb{Z}}\right)^I$
3. aucun ensemble fini n'est dans $\mathbb{U}$, et il existe un morphisme d'anneaux $f : \left({}^{\mathbb{Z}}/_{2\mathbb{Z}}\right)^I \longrightarrow {}^{\mathbb{Z}}/_{2\mathbb{Z}}$ tel que $\mathbb{1}(\mathbb{U}) = 1 + \mathrm{Ker}(f)$

Théorème de l'ultrafiltre

Théorème (version faible de l'axiome du choix) : Pour tout ensemble infini I, il existe un ultrafiltre non-principal sur I.

Structures

Définition : Une **structure** est un tuple $\mathcal{M} = (D, (f_j)_j, (R_k)_k, (c_t)_t)$, où :

- D est un ensemble ; c'est le **domaine** de $\mathcal{M}$.
- Les f_j sont des applications $D^n \longrightarrow D$, avec $n \in \mathbb{N}$ (on dit que n est l'**arité** de f_j) ; ce sont les **fonctions** de $\mathcal{M}$.
- Les R_k sont des relations sur D d'arité quelconque, c'est à dire des sous-ensemble de D^n, pour $n \in \mathbb{N}$; ce sont les **prédicats** de $\mathcal{M}$.
- Les c_t sont des éléments de D ; ce sont les **constantes** de $\mathcal{M}$.

Exemples

Un groupe $(G, \cdot)$ est une structure avec aucune constante, aucun prédicat, et une fonction d'arité 2.
On peut aussi voir un groupe comme une structure $(G, \cdot, ^{-1}, e)$ avec une constante, une fonction d'arité 2 et une fonction d'arité 1.

Exemples

Un anneau est une structure $(A, +, \times, -, 0, 1)$ avec deux constantes, deux fonctions d'arité 2 et une fonction d'arité 1.

Exemples

$(\mathbb{R}, <)$ est une structure dont le domaine est $\mathbb{R}$, avec un prédicat $<$ d'arité 2.

Langage

Soit $\mathcal{M}$ une structure.
On va représenter chaque fonction, prédicat et constante de $\mathcal{M}$ par un symbole. La donnée de ces symboles, et de l'arité de chaque opération et prédicat de $\mathcal{M}$ forme ce que l'on appelle le **langage** de $\mathcal{M}$, noté $\mathcal{L}(\mathcal{M})$.

Deux structures distinctes peuvent avoir le même langage. Par exemple, $(\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}})$ et $(\mathbb{Q}, +_{\mathbb{Q}})$ sont deux structures différentes qui ont le même langage : une fonction $+$ d'arité 2.

Formules

Définition : Soit $\mathcal{L}$ un langage. Une $\mathcal{L}$-**formule** du premier ordre est une formule construite avec les éléments suivants :

- des symboles de fonction, constante et prédicat de $\mathcal{L}$
- des variables x, y...
- l'égalité $=$
- les connecteurs logiques $OU, ET, NON, \Longrightarrow, ...$
- les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ **qui seront restreints au domaine de la structure**

Satisfaction

Définition Soit $\mathcal{M} = (D, ...)$ une structure, $\varphi(x_1...x_n)$ une $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-formule dont les variables libres sont $x_1...x_n$, et $a_1...a_n \in D$. On notera :

$$\mathcal{M} \models \varphi(a_1...a_n)$$

pour dire que la formule φ est vraie dans $\mathcal{M}$ quand on remplace les x_i par les a_i.

Exemples

Dans le langage $\{\times\}$, soit $\varphi(x)$ la formule : $\exists y \; y \times y = x$.
On a $(\mathbb{R}, \times_{\mathbb{R}}) \models \varphi(2)$, car 2 a une racine carrée dans $\mathbb{R}$.
Par contre, $(\mathbb{Q}, \times_{\mathbb{Q}}) \not\models \varphi(2)$, car 2 n'a pas de racine carrée dans $\mathbb{Q}$.

Exemples

Un ensemble muni d'une relation d'équivalence est une structure $(D, \equiv)$, où $\equiv$ est un prédicat d'arité 2, qui satisfait les trois formules suivantes du langage $\{\equiv\}$:

- $\forall x \ x \equiv x$
- $\forall x \ \forall y \ x \equiv y \Longrightarrow y \equiv x$
- $\forall x \ \forall y \ \forall z \ (x \equiv y \ ET \ y \equiv z) \Longrightarrow x \equiv z$

Soit $\mathcal{L} = \{(f_j)_j, (R_k)_k, (c_t)_t\}$ un langage, I un ensemble infini, et $\mathbb{U}$ un ultrafiltre non-principal sur I. Pour chaque $i \in I$ soit $\mathcal{M}_i$ une structure dont le langage est $\mathcal{L}$.
On va définir l'**ultraproduit** des $\mathcal{M}_i$ (par rapport à $\mathbb{U}$), noté $\lim\limits_{i\to\mathbb{U}} \mathcal{M}_i$, qui sera une nouvelle structure sur le langage $\mathcal{L}$.

Soit D_i le domaine de $\mathcal{M}_i$. On définit une relation d'équivalence $\equiv$ sur $\prod_{i \in I} D_i$ par :

$$(a_i)_{i \in I} \equiv (b_i)_{i \in I} \iff \{i \in I | a_i = b_i\} \in \mathbb{U}$$

Le domaine de $\lim_{i \to \mathbb{U}} \mathcal{M}_i$ est alors :

$$\lim_{i \to \mathbb{U}} D_i = \prod_{i \in I} D_i \big/ \equiv$$

La classe de $(a_i)_{i \in I}$ modulo $\equiv$ est notée $\lim_{i \to \mathbb{U}} a_i$.

Remarque :

Si les $\mathcal{M}_i$ sont des groupes, alors $\left\{a \in \prod_{i\in I} D_i | \lim_{i\to\mathbb{U}} a_i = \lim_{i\to\mathbb{U}} e\right\}$ est un sous-groupe distingué du groupe produit $\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i$, et $\lim_{i\to\mathbb{U}} \mathcal{M}_i$ est le groupe quotient qui lui correspond.
Si les $\mathcal{M}_i$ sont des anneaux, alors $\left\{a \in \prod_{i\in I} D_i | \lim_{i\to\mathbb{U}} a_i = \lim_{i\to\mathbb{U}} 0\right\}$ est un idéal de l'anneau produit $\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i$, et $\lim_{i\to\mathbb{U}} \mathcal{M}_i$ est l'anneau quotient lui correspond.

Théorème : Pour chaque $i \in I$, soit f_i une application $D_i^n \longrightarrow D_i$. Soit $a_1 ... a_m$, des classes d'équivalences, et $(a_{ij})_{ij}$ et $(b_{ij})_{ij}$ deux systèmes de représentants des a_j. C'est à dire que pour tout j :

$$\lim_{i \to \mathbb{U}} a_{ij} = a_j = \lim_{i \to \mathbb{U}} b_{ij}$$

Alors :

$$\lim_{i \to \mathbb{U}} f_i(a_{i1}, a_{i2} ... a_{in}) = \lim_{i \to \mathbb{U}} f_i(b_{i1}, b_{i2} ... b_{in})$$

L'application

$\lim_{i \to \mathbb{U}} f_i : \left(\lim_{i \to \mathbb{U}} a_{i1}, \lim_{i \to \mathbb{U}} a_{i2} ... \lim_{i \to \mathbb{U}} a_{in} \right) \longmapsto \lim_{i \to \mathbb{U}} f_i(a_{i1}, a_{i2} ... a_{in})$ est donc bien définie.

$$\begin{tikzcd}
\left(\prod_{i\in I} D_i\right)^n \arrow[r, "\prod_{i\in I} f_i"'] \arrow[d, "\left(\lim_{i\to\mathbb{U}}\right)^n"'] & \prod_{i\in I} D_i \arrow[d, "\lim_{i\to\mathbb{U}}"] \\
\left(\lim_{i\to\mathbb{U}} D_i\right)^n \arrow[r, dotted, "\lim_{i\to\mathbb{U}} f_i"'] & \lim_{i\to\mathbb{U}} D_i
\end{tikzcd}$$

Preuve : Par hypothèse, pour tout j, chacun des évènements $E_j = \{i \in I | a_{ij} = b_{ij}\}$ est de mesure 1.

Preuve : Par hypothèse, pour tout j, chacun des évènements $E_j = \{i \in I | a_{ij} = b_{ij}\}$ est de mesure 1.
Donc $\bigcap_j E_j$ est aussi de mesure 1.

Preuve : Par hypothèse, pour tout j, chacun des évènements $E_j = \{i \in I | a_{ij} = b_{ij}\}$ est de mesure 1.
Donc $\bigcap_j E_j$ est aussi de mesure 1.
Il est clair que $\bigcap_j E_j$ est un sous-ensemble de $\{i \in I | f_i(a_{i1}, a_{i2}...a_{in}) = f_i(b_{i1}, b_{i2}...b_{in})\}$, qui est donc à son tour de mesure 1, ce qu'il fallait démontrer.

De même, si R_i est un prédicat d'arité n sur D_i, on peut définir le prédicat $\lim\limits_{i \to \mathbb{U}} R_i$ par :

$$\left(\lim_{i \to \mathbb{U}} a_{i1}, \ldots \lim_{i \to \mathbb{U}} a_{in}\right) \in \lim_{i \to \mathbb{U}} R_i \iff \{i \in I | \, (a_{i1}, \ldots a_{in}) \in R_i\} \in \mathbb{U}$$

On sait donc quelle sera la structure de l'ultraproduit :
L'ultraproduit (par rapport à $\mathbb{U}$) des structures

$$\mathcal{M}_i = (D_i, (f_{ij})_j, (R_{ik})_k, (c_{it})_t)$$

sera exactement :

$$\lim_{i \to \mathbb{U}} \mathcal{M}_i = \left(\lim_{i \to \mathbb{U}} D_i, \left(\lim_{i \to \mathbb{U}} f_{ij} \right)_j, \left(\lim_{i \to \mathbb{U}} R_{ik} \right)_k, \left(\lim_{i \to \mathbb{U}} c_{it} \right)_t \right)$$

Théorème de Łoś

Théorème : Si $\varphi(x_1 ... x_n)$ est une $\mathcal{L}$-formule du premier ordre, et $a_{i1} ... a_{in} \in D_i$, alors :

$$\lim_{i \to \mathbb{U}} \mathcal{M}_i \models \varphi\left(\lim_{i \to \mathbb{U}} a_{i1} ... \lim_{i \to \mathbb{U}} a_{in}\right) \iff \{i \in I | \mathcal{M}_i \models \varphi(a_{i1} ... a_{in})\} \in \mathbb{U}$$

Soit $\mathbb{U}$ un ultrafiltre non-principal sur l'ensemble des nombres premiers, et $\mathcal{M} = \lim_{p \to \mathbb{U}} \left(\mathbb{F}_p^{alg}, +, \times, 0, 1 \right)$.

Soit $\mathbb{U}$ un ultrafiltre non-principal sur l'ensemble des nombres premiers, et $\mathcal{M} = \lim_{p \to \mathbb{U}} \left(\mathbb{F}_p^{alg}, +, \times, 0, 1 \right)$.

$\mathcal{M}$ est un corps algébriquement clos.

Soit $\mathbb{U}$ un ultrafiltre non-principal sur l'ensemble des nombres premiers, et $\mathcal{M} = \lim_{p \to \mathbb{U}} \left(\mathbb{F}_p^{alg}, +, \times, 0, 1 \right)$.

$\mathcal{M}$ est un corps algébriquement clos.

Pour tout q premier, les $\mathbb{F}_p^{alg}$ sont presque partout de caractéristique $\neq q$, donc $\mathcal{M}$ n'est pas de caractéristique q. Donc $\mathcal{M}$ est de caractéristique 0.

Soit $\mathbb{U}$ un ultrafiltre non-principal sur l'ensemble des nombres premiers, et $\mathcal{M} = \lim\limits_{p \to \mathbb{U}} \left(\mathbb{F}_p^{alg}, +, \times, 0, 1 \right)$.

$\mathcal{M}$ est un corps algébriquement clos.

Pour tout q premier, les $\mathbb{F}_p^{alg}$ sont presque partout de caractéristique $\neq q$, donc $\mathcal{M}$ n'est pas de caractéristique q. Donc $\mathcal{M}$ est de caractéristique 0.

On peut montrer que $|\mathcal{M}| = |\mathbb{C}|$.

Soit $\mathbb{U}$ un ultrafiltre non-principal sur l'ensemble des nombres premiers, et $\mathcal{M} = \lim_{p \to \mathbb{U}} \left(\mathbb{F}_p^{alg}, +, \times, 0, 1 \right)$.
$\mathcal{M}$ est un corps algébriquement clos.
Pour tout q premier, les $\mathbb{F}_p^{alg}$ sont presque partout de caractéristique $\neq q$, donc $\mathcal{M}$ n'est pas de caractéristique q. Donc $\mathcal{M}$ est de caractéristique 0.
On peut montrer que $|\mathcal{M}| = |\mathbb{C}|$.
Donc $\mathcal{M}$ est isomorphe à $\mathbb{C}$!

Soit $\mathbb{U}$ un ultrafiltre non-principal sur $\mathbb{N}$, et $\mathcal{M} = \lim_{n \to \mathbb{U}} (\mathbb{Z}, +, \times, >, 1)$.

Soit $\mathbb{U}$ un ultrafiltre non-principal sur $\mathbb{N}$, et
$\mathcal{M} = \lim_{n \to \mathbb{U}} (\mathbb{Z}, +, \times, >, 1)$.
$\mathcal{M}$ satisfait exactement les mêmes formules closes du premier ordre que $(\mathbb{Z}, +, \times, >, 1)$.

Soit $\mathbb{U}$ un ultrafiltre non-principal sur $\mathbb{N}$, et $\mathcal{M} = \lim\limits_{n \to \mathbb{U}} (\mathbb{Z}, +, \times, >, 1)$.
$\mathcal{M}$ satisfait exactement les mêmes formules closes du premier ordre que $(\mathbb{Z}, +, \times, >, 1)$.
Pourtant, $\lim\limits_{n \to \mathbb{U}} n$ est un élément de $\mathcal{M}$ plus grand que tous les entiers !

Soit $\mathbb{U}$ un ultrafiltre non-principal sur $\mathbb{N}$, et $\mathcal{M} = \lim\limits_{n \to \mathbb{U}} (\mathbb{Z}, +, \times, >, 1)$.
$\mathcal{M}$ satisfait exactement les mêmes formules closes du premier ordre que $(\mathbb{Z}, +, \times, >, 1)$.
Pourtant, $\lim\limits_{n \to \mathbb{U}} n$ est un élément de $\mathcal{M}$ plus grand que tous les entiers !
Mieux que cela : $\lim\limits_{n \to \mathbb{U}} n!$ est un élément de $\mathcal{M}$ **multiple** de tous les entiers !

Soit $\mathbb{U}$ un ultrafiltre non-principal sur $\mathbb{N}$, et
$\mathcal{M} = \lim\limits_{n \to \mathbb{U}} (\mathbb{R}, <, (\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}, +, \times)$.

Soit $\mathbb{U}$ un ultrafiltre non-principal sur $\mathbb{N}$, et
$\mathcal{M} = \lim\limits_{n \to \mathbb{U}} (\mathbb{R}, <, (\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}, +, \times)$.
$\mathcal{M}$ satisfait toutes les mêmes formules du premier ordre à paramètres dans $\mathbb{R}$ que $\mathbb{R}$.

Soit $\mathbb{U}$ un ultrafiltre non-principal sur $\mathbb{N}$, et
$\mathcal{M} = \lim\limits_{n \to \mathbb{U}} (\mathbb{R}, <, (\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}, +, \times)$.
$\mathcal{M}$ satisfait toutes les mêmes formules du premier ordre à paramètres dans $\mathbb{R}$ que $\mathbb{R}$.
Pourtant, $\lim\limits_{n \to \mathbb{U}} \dfrac{1}{n+1}$ est un élément de $\mathcal{M}$ qui est strictement positif, mais plus petit que tous les réels positifs ! On parle d'infinitésimal.

Théorème : Il n'existe aucune formule φ tel que pour tout $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models \varphi \Longleftrightarrow \mathcal{M}$ est une structure finie.

Théorème : Il n'existe aucune formule φ tel que pour tout $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models \varphi \iff \mathcal{M}$ est une structure finie.
Preuve : Supposons par l'absurde que φ existe. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{M}_n$ une structure de cardinal n. Alors un ultraproduit des $\mathcal{M}_n$ sera une structure infinie qui satisfait φ, ce qui est absurde.

Avec cette technique, on peut montrer que :

- Etre un anneau de caractéristique non-nulle est inexprimable au premier ordre (cf l'exemple avec $\mathbb{C}$).
- La propriété archimédienne est inexprimable au premier ordre (cf l'exemple avec l'ultrapuissance de $\mathbb{R}$).

Pour débuter en logique mathématique

René Cori et Daniel Lascar, *Logique mathématique* (tomes I et II).