

## MARATHON D'ORSAY DE MATHÉMATIQUES

Avril 2018

Voici les énoncés des derniers problèmes de la saison 2017-2018, dont les solutions sont attendues au plus tard le **mercredi 2 mai 2018 à 14h**, par la poste (voir l'adresse sur <http://www.math.u-psud.fr/marathon>), par email à [marathon.orsay@math.u-psud.fr](mailto:marathon.orsay@math.u-psud.fr) ou déposées dans une boîte en carton prévue à cet effet au rez-de-chaussée du bâtiment 307, dans la salle des casiers à courrier située à droite du grand hall, juste après avoir franchi l'entrée principale.

Nous vous rappelons que pour que vos solutions puissent être considérées comme correctes, il est indispensable que vous justifiez très soigneusement vos réponses, comme dans une démonstration. Si vous répondez à plusieurs problèmes, il vous est demandé de le faire sur des feuilles séparées. Merci d'indiquer clairement votre nom, prénom, année d'études (ou statut), établissement, ville et adresse email.

### Problème 13 (semi et complet)

Lando mise son vaisseau contre Han à une variante du jeu de cartes le plus populaire de la galaxie. On mélange 22 cartes numérotées de 1 à 22, puis on distribue la moitié des cartes à Lando et l'autre moitié à Han. Chacun à son tour dépose l'une de ses cartes au choix sur la table, avec son numéro visible. Le gagnant est le premier joueur qui en jouant rend multiple de 23 la somme des numéros des cartes déposées. Si Lando commence et que chacun joue de manière optimale, quelle est la probabilité que Han remporte la victoire (et devienne donc le propriétaire du Faucon Millenium) ?

### Problème 14 (semi et complet)

En arrivant dans sa classe, Mathilde trouve 11 entiers positifs écrits sur une ligne au tableau. Est-il toujours possible pour Mathilde, quels que soient les entiers au tableau, d'effacer certains de ces nombres (éventuellement aucun, mais pas tous) puis de placer des + et des - entre les nombres restants de sorte que le résultat soit divisible par 2018 ?

### Problème 15 (complet)

Combien de nombres réels  $x$  satisfont à l'équation  $\frac{1}{7} \log_2 x = \sin(3\pi x)$  ?

### Problème 16 (complet)

Trouver toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$f(f(x+y) + yf(x)) + (x+1)f(y) = x$$

quels que soient  $x, y \in \mathbb{R}$ .