Marathon d'Orsay de Mathématiques

Résultats de la quatrième vague d'avril 2018

Voici les solutions des derniers problèmes précédents, avec les noms des participants qui ont fourni une solution correcte.

Solution du problème 13 : Remarquons que Lando ne peut pas gagner au premier coup, puisque les entiers de 1 à 22 ne sont pas divisibles par 23. Après le premier coup, le reste de la division des sommes des cartes sur la table par 23 est un entier i entre 1 et 22. Seule la carte $23 - i$ permet de gagner au coup suivant (mais elle n'est pas forcément entre les mains du joueur dont c'est le tour de jouer). Ainsi, pour chacune des cartes qu'il peut jouer, Han sait quelle carte permettrait à Lando de gagner au coup suivant. De plus, il sait quelles cartes possède Lando (toutes celles qu'il n'avait pas au début du jeu, moins celles déjà jouées par Lando). Comme c'est Lando qui a commencé, Han a toujours une carte de plus que Lando lorsque c'est à son tour de jouer. Il peut donc toujours choisir de jouer une carte de sorte que Lando ne puisse pas gagner au coup suivant. Par conséquent, Lando ne peut gagner la partie. Soit Han gagne avant que toutes les cartes ne soient déposées, soit il dépose la dernière carte du jeu. Mais alors la somme des cartes est $1+2+\ldots+22 = 23\times 11$ un multiple de 23, de sorte que Han gagnera toujours, donc avec une probabilité 1.

Ont fourni une solution correcte : C. Lamy (2nde au Lycée Einstein, Sainte Geneviève des Bois), D. Girault (L3 MFA + magist. à UPSud, Orsay), D. Kadnikov (doctorant à l'Ecole des ponts et chaussées, Marne-la-Vallée), C. Moulin (doctorante à UPSud, LRI et INRA, Gif-sur-Yvette et Orsay), C. Lemonnier (prof. agrégée au Lycée Jean-François Millet, Cherbourg-en-Cotentin).

Solution du problème 14 : Si Mathilde veut choisir certains des 11 entiers, elle peut le faire de $2^{11} = 2048$ manières différentes (pour chaque entier, soit elle le choisit, soit elle ne le choisit pas). Considérons le reste de la division par 2018 de la somme des entiers choisis : on obtient 2048 entiers, chacun entre 0 et 2017. Par conséquent, deux de ces restes au moins sont égaux. Appelons A et B des ensembles d'entiers parmi les 11 entiers au tableau correspondant à des restes identiques. Mathilde peut alors écrire "+" devant chaque entier dans $A \setminus B$, écrire "-" devant chaque entier dans $B \setminus A$, et effacer tous les autres entiers. Le résultat sera un multiple de 2018. Si ce qui reste écrit au tableau commence par "-", il suffit d'échanger A et B pour que les opérations écrites par Mathilde soient toutes entre deux entiers non effacés, et pas devant le premier entier restant (car le premier "+" est alors inutile). Mathilde peut donc toujours agir comme décrit dans l'énoncé afin d'obtenir un résultat divisible par 2018.

Ont fourni une solution correcte : L. Fliche (Tle S au Lycée Lakanal, Sceaux), D. Girault (L3 MFA + magist. à UPSud, Orsay), M. Farid (M2 Stat Finance à l'ENSAE, Palaiseau), D. Kadnikov (doctorant à l'Ecole des ponts et chaussées, Marne-la-Vallée).

Solution du problème 15 : Le membre de droite oscille périodiquement entre $+1$ et -1 avec une période $\frac{2}{3}$. Le membre de gauche sera strictement inférieur à -1 (ou non défini) lorsque $x < 2^{-7} = \frac{1}{128}$ et sera strictement supérieur à $+1$ lorsque $x > 2^7 = 128$. L'intervalle $[0, 128]$ comprend 192 périodes du membre de droite. Dans les 190 périodes de la forme $[\frac{4}{3} + k\frac{2}{3}, 2 + k\frac{2}{3}]$ pour $k = 0, \ldots, 189$, le membre de droite est négatif dans la deuxième moitié de la période, de sorte que l'équation ne peut y avoir de solution. Dans le deuxième quart de la période, le membre de droite décroît de 1 à 0 alors que le membre de gauche est croissant et positif, de sorte qu'il y a exactement une solution de l'équation dans cet intervalle. Dans le premier quart de la période, l'écart $\frac{1}{7}\log_2 x - \sin(3\pi x)$ passe d'une valeur positive à une valeur négative en décroissant puis en croissant, de sorte qu'il y a exactement une solution de l'équation dans cet intervalle. On obtient donc deux solutions dans chacun de ces 190 périodes. Dans la première période $[0, \frac{2}{3}]$, le membre de gauche est négatif, et on trouve cette fois (par un raisonnement analogue) deux solutions dans la deuxième moitié de la période. Enfin, dans la deuxième période $[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$, les deux membres sont constamment de signes opposés, et nuls au milieu de cette période, ce qui donne lieu à l'unique solution dans cette période. Au total, on obtient donc $2 + 1 + 2 \times 190 = 383$ solutions réelles pour cette équation.

Ont fourni une solution correcte : B. Nguyen (Tle S au Lycée Lakanal, Sceaux), D. Girault (L3 MFA + magist. à UPSud, Orsay), A. Napame (M1 MF + magist. à UPsud, Orsay), D. Kadnikov (doctorant à l'Ecole des ponts et chaussées, Marne-la-Vallée), C. Moulin (doctorante à UPSud, LRI et INRA, Gif-sur-Yvette et Orsay), C. Lemonnier (prof. agrégée au Lycée Jean-François Millet, Cherbourg-en-Cotentin).

Solution du problème 16 : En posant $y = 0$ dans l'équation, on obtient $f(f(x)) = x(1 - f(0)) - f(0)$. Si $f(0) \neq 1$, on en déduit que $f \circ f$ et donc f est bijective. En posant $x = -1$ dans l'équation, on obtient $f(f(y-1) + yf(-1)) = -1$. Par la bijectivité de f, il existe un unique réel c tel que $f(c) = -1$, et on a $f(y-1) + yf(-1) = c$. En d'autres termes, f est une fonction affine. En posant $f(x) = ax + b$ pour des constantes a et b, on obtient $a(y-1) + b + y(b-a) = c$ de sorte que $b = 0$ et $a = -c$. La fonction $f(x) = -cx$ doit satisfaire $f(c) = -1$, de sorte que $c^2 = 1$. Parmi les fonctions $f(x) = \pm x$, seule la fonction $f(x) = -x$ satisfait à l'équation. D'autre part, si $f(0) = 1$, on déduit de la relation $f(f(x)) = x(1 - f(0)) - f(0)$ ci-dessus que $f(f(x)) = -1$. Il existe donc (au moins) un réel d tel que $f(d) = -1$, et on a $f(f(d)) = -1$, de sorte que $f(-1) = -1$. En posant $x = -1$ et $y = 1$ dans l'équation, on obtient $f(f(0) + f(-1)) = -1$, c'est-à-dire $f(0) = -1$, ce qui contredit l'hypothèse $f(0) = 1$. L'unique fonction satisfaisant cette équation est donc $f(x) = -x$.

Ont fourni une solution correcte : D. Girault (L3 MFA + magist. à UPSud, Orsay), A. Napame (M1 MF + magist. à UPsud, Orsay), M. Farid (M2 Stat Finance à l'ENSAE, Palaiseau), D. Kadnikov (doctorant à l'Ecole des ponts et chaussées, Marne-la-Vallée),