# Marathon d'Orsay de Mathématiques

Avril 2023

Voici les énoncés des derniers problèmes de la saison 2022–2023 du Marathon d'Orsay de Mathématiques, dont les solutions sont attendues au plus tard le **lundi 24 avril 2023 à 14h** par email à `marathon.math@universite-paris-saclay.fr`, par la poste (voir l'adresse sur https ://www.imo.universite-paris-saclay.fr/marathon), ou déposées dans une boîte en carton prévue à cet effet au rez-de-chaussée du bâtiment 307, dans la salle des casiers à courrier située à droite du grand hall, juste après avoir franchi l'entrée principale.

Nous vous rappelons que pour que vos solutions puissent être considérées comme correctes, il est indispensable que vous justifiez très soigneusement vos réponses, comme dans une démonstration. Merci d'indiquer clairement votre nom, prénom, année d'études (ou statut), établissement, ville et adresse email.

## Problème 13 (semi et complet)

Jade s'amuse à recouvrir les cases d'un échiquier $6 \times 6$ avec 18 dominos $2 \times 1$, de sorte que chaque case soit couverte par exactement une moitié de domino. A chaque fois qu'elle recouvre entièrement l'échiquier, elle constate que l'on pourrait scinder celui-ci en deux rectangles sans couper de domino. Cette propriété est-elle toujours vraie, quelle que soit la manière de recouvrir entièrement l'échiquier avec les dominos ?

## Problème 14 (semi et complet)

Une grande enquête menée par un professeur d'EPS révèle que chacun des 2023 derniers jours, au moins la moitié des élèves actuellement en Terminale dans son lycée ont pratiqué une activité sportive. Ce professeur sera-t-il capable de composer une équipe de 10 ambassadeurs du sport parmi ces élèves, de sorte que chacun des 2023 derniers jours l'un de ces 10 élèves a pratiqué une activité sportive ?

## Problème 15 (complet)

Déterminer tous les triplets $(a, b, c)$ d'entiers $> 1$ tels que $a$ divise $bc - 1$, $b$ divise $ac - 1$ et $c$ divise $ab - 1$.

**Problème 16 (complet)**

On note $\mathbb{N}_0$ l'ensemble des entiers strictement positifs. Pour toute fonction $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ et tout entier $k > 0$, on note $f^{[k]}(n) = \underbrace{f(f(\dots f}_{k}(n)\dots))$ pout tout $n \in \mathbb{N}_0$.

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ injectives (c'est-à-dire telles que $f(m) = f(n)$ implique $m = n$) satisfaisant $f^{[f(n)]}(m)f^{[f(m)]}(n) = (f(m+n))^2$ pour tout $m, n \in \mathbb{N}_0$.