Marathon d'Orsay de Mathématiques

Solutions de la quatrième vague d'avril 2023

Voici les solutions de la quatrième vague de problèmes, avec les noms des participants qui ont fourni une solution correcte.

Solution du problème 13 : Quelque soit la manière dont Jade recouvre l'échiquier par des dominos, celui-ci pourra être scindé en deux rectangles sans couper de domino. Si on suppose le contraire, alors parmi les dominos recouvrant les cases de la première rangée, il doit y en avoir au moins un (donc au moins 2 puisqu'il y a 6 cases à couvrir dans cette rangée) qui sont placés à cheval sur les rangées 1 et 2 (sinon on peut scinder l'échiquier entre les rangées 1 et 2 sans couper de domino). De même, il doit y avoir au moins 2 dominos placés à cheval entre les rangées 2 et 3, et ainsi de suite jusqu'au rangées 5 et 6. Ceci donne un total d'au moins $2 \times 5 = 10$ dominos placés verticalement. En argumentant de même avec les colonnes de l'échiquier, on trouve qu'il y a au moins 10 dominos placés horizontalement. Ceci donne un total d'au moins 20 dominos, qui doivent couvrir au moins 40 cases, alors que l'échiquier n'en compte que $6 \times 6 = 36$, donc cette situation est impossible.

Ont fourni une solution correcte : R. Crovisier (2nde au Lycée Lakanal, à Sceaux), F. Choquet (1ère au Lycée Hélène Boucher, à Paris), B. Guinard (1ère au Lycée N'R Hatorah, à Paris), G. Hoffmann (1ère au Lycée Saint Erembert, à Saint-Germain-en-Laye), M. Komisarova (1ère bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), P. Laurent-Levinson (1ère au Lycée Ecole Alsacienne, à Paris), A. Cabanis (Tle au Lycée Notre-Dame des Oiseaux, à Paris), P. Duvivier (Tle au Lycée René Cassin, à Arpajon), C. Hebey (Tle au Lycée Charlemagne, à Paris), J. Hoarau (Tle au Lycée Sonia Delaunay, à Villepreux), K. Ricard (Tle au Lycée Français Alexandre Yersin, à Hanoi, Vietnam), E. Vandenbroucke (Tle au Lycée Fénelon, à Grasse), S. Gvozdić (LDD2 Informatique - Mathématiques à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), M. Corlay (1ère année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), N. Tardy (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), R. Guezzi (M1 à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette), C. Metz (doctorant à l'Université Paris-Saclay, à Orsay et au CEA, à Palaiseau), D. Collignon (attaché statisticien hors classe au département informatique et télécommunications pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), N. Didrit (professeur de mathématiques et informatique au Lycée La Salle-Passy Buzenval, à Rueil-Malmaison), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon), T. Ravary (enseignant au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau), C. Romon (secrétaire général de la Mission interministérielle pour la qualité des constructions publiques, à La Défense), l'équipe formée par C. Henry (1ère au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau) et A. Mehoued (1ère au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau), l'équipe formée par M. Domergue (1ère au Lycée Vaugelas, à Chambéry) et G. A. Faraj (Tle au Lycée Nevers, à Montpellier), l'équipe formée par N. Ismaaili Erny (1ère au Lycée International des Pontonniers, à Strasbourg) et A. Zhang (Tle au Lycée le Gymnase Jean Sturm, à Strasbourg), l'équipe formée par L. Bouley (Tle au Cours Secondaire d'Orsay, à Orsay), J. Monteilhet (Tle au Lycée du Sacré Cœur, à La Ville du Bois) et A. Waldek (Tle au Lycée du Sacré Cœur, à La Ville du Bois), l'équipe formée par C. Cedillo-Vayson de Pradenne (Tle au Lycée Jean de la Fontaine, à Paris) et A. Lemarié (Tle au Lycée Jean de la Fontaine, à Paris), l'équipe formée par I. Israël (Tle au Lycée Franco-Allemand, à

Buc), A. Perdriaud (LDD1 info-math à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et T. Saïdi-Pankow (Tle au Lycée Jean-Pierre Vernant, à Sèvres), l'équipe formée par S. Bakayoko (1ère Master ingénieur civil à l'Ecole Royale Militaire, à Bruxelles) et N. E. Polneau (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), l'équipe formée par J. Clement-Cottuz (M1 mathématiques appliquées à l'Université Grenoble Alpes, à Grenoble) et L. Vanhaelewyn (L3 à l'ENS, à Paris), l'équipe formée par M. Baccara (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris, M1 à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, à Paris), S. Baumert (césure, à Paris) et P. Boureau (M1 à l'ENS, à Paris), l'équipe formée par F. Arous (L2 MFA à l'Université Paris Cité, à Paris), T. De Wolf (2ème bachelor à Sciences Po, à Paris et à l'Université Paris Cité, à Paris) et J. Scardigli (2ème bachelor à la Cambridge University, à Cambridge), l'équipe formée par E. Monard (4ème année à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette) et P.-A. Monard (diplômé de l'ENS, à Issy-les-Moulineaux).

Solution du problème 14 : Notons N le nombre d'élèves de Terminale dans le lycée de ce professeur d'EPS. Alors quel quel soit d entre 1 et 2023, dans tout ensemble de d jours parmi les 2023 derniers jours, il y a plus de $\frac{1}{2}Nd$ activités sportives qui ont été pratiquées. Donc on peut trouver un élève qui a pratiqué une activité sportive au moins $\frac{1}{2}d$ jours parmi ces d jours. Notons que si on ne peut pas faire mieux que $\frac{1}{2}d$ jours, c'est que tous les élèves ont pratiqué une activité sportive pendant exactement $\frac{1}{2}d$ jours.
Ainsi, parmi les $r_1 = 2023$ derniers jours, on peut trouver un élève qui a pratiqué une activité sportive durant au moins $s_1 = \lceil \frac{r_1}{2} \rceil$ jours. De manière générale, pour $k \geq 2$, durant les $r_k = r_{k-1} - s_{k-1}$ jours restants, on peut trouver un élève qui a pratiqué une activité sportive durant au moins $s_k = \lceil \frac{r_k}{2} \rceil$ jours. Si $s_k = \frac{r_k}{2}$, tous les élèves (y compris un élève déjà choisi) ont pratiqué une activité sportive durant s_k jours. On choisit alors un jour parmi les $r_k - s_k$ restants et un élève qui a fait du sport ce jour-là, de manière à recouvrir dans tous les cas au moins $s_k = \lceil \frac{r_k+1}{2} \rceil$ jours parmi les r_k jours restants.
En partant de $r_1 = 2023$, on trouve donc $s_1 = 1012$, $r_2 = 1011$, $s_2 = 506$, $r_3 = 505$, $s_3 = 253$, $r_4 = 252$, $s_4 = 127$, $r_5 = 125$, $s_5 = 63$, $r_6 = 62$, $s_6 = 32$, $r_7 = 30$, $s_7 = 16$, $r_8 = 14$, $s_8 = 8$, $r_9 = 6$, $s_9 = 4$, $r_{10} = 2$, et $s_{10} = 2 = r_{10}$. Ceci correspond à 10 élèves (pas forcément distincts) qui ensemble ont pratiqué une activité sportive tous les jours durant les 2023 derniers jours. Si il y a moins que 10 élèves distincts, le professeur d'EPS peut compléter le groupe en ajoutant des élèves pris au hasard.

Ont fourni une solution correcte : J. Hoarau (Tle au Lycée Sonia Delaunay, à Villepreux), E. Vandenbroucke (Tle au Lycée Fénelon, à Grasse), S. Gvozdić (LDD2 Informatique - Mathématiques à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), C. Metz (doctorant à l'Université Paris-Saclay, à Orsay et au CEA, à Palaiseau), D. Collignon (attaché statisticien hors classe au département informatique et télécommunications pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon), T. Ravary (enseignant au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau), C. Romon (secrétaire général de la Mission interministérielle pour la qualité des constructions publiques, à La Défense), l'équipe formée par N. Ismaaili Erny (1ère au Lycée International des Pontonniers, à Strasbourg) et A. Zhang (Tle au Lycée le Gymnase Jean Sturm, à Strasbourg), l'équipe formée par S. Bakayoko (1ère Master ingénieur civil à l'Ecole Royale Militaire, à Bruxelles) et N. E. Polneau (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), l'équipe formée par J. Clement-Cottuz (M1 mathématiques appliquées à l'Université Grenoble Alpes, à Grenoble) et L. Vanhaelewyn (L3 à l'ENS, à Paris), l'équipe formée par M. Baccara (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris, M1 à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, à Paris), S. Baumert (césure, à Paris) et P. Boureau (M1 à l'ENS, à Paris).

Solution du problème 15 : Remarquons que les entiers a, b et c sont premiers entre eux deux à deux. En effet, si a et b ont un facteur commun $d > 1$, alors $bc - 1$ n'est pas multiple de d, ce qui contredit que a divise $bc - 1$. Comme a divise $bc - 1$, a divise aussi $ab + bc + ac - 1$. De même, b et c divisent aussi $ab + bc + ac - 1$. Comme a, b et c sont premiers entre eux deux à deux, ceci implique que abc divise $ab+bc+ac-1$. En particulier, $abc \leq ab+bc+ac-1$. Quitte à permuter ces entiers, on peut supposer que $a \geq b \geq c > 1$. Alors on a $abc \leq 3ab - 1 < 3ab$ de sorte que $c < 3$, donc $c = 2$. Alors la première inégalité devient $2ab \leq ab + 2a + 2b - 1$ de sorte que $ab < 2a + 2b \leq 4a$, donc $b < 4$. Puisque b est premier avec $c = 2$, on a $b = 3$. La première inégalité devient $6a \leq 5a + 5$ ou encore $a \leq 5$. Comme a est premier avec 2 et 3, on doit avoir $a = 5$. On vérifie qu'en effet 5 divise $2 \times 3 - 1 = 5$, 3 divise $5 \times 2 - 1 = 9$ et 2 divise $5 \times 3 - 1 = 14$, de sorte que $(5, 3, 2)$ et ses permutations sont les seuls triplets qui conviennent.

Ont fourni une solution correcte : F. Choquet (1ère au Lycée Hélène Boucher, à Paris), G. Hoffmann (1ère au Lycée Saint Erembert, à Saint-Germain-en-Laye), R. Bonnet (Tle au Lycée Agora, à Puteaux), J. Hoarau (Tle au Lycée Sonia Delaunay, à Villepreux), K. Ricard (Tle au Lycée Français Alexandre Yersin, à Hanoi, Vietnam), E. Vandenbroucke (Tle au Lycée Fénelon, à Grasse), S. Gvozdić (LDD2 Informatique - Mathématiques à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), M. Corlay (1ère année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), N. Tardy (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), R. Guezzi (M1 à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette), C. Metz (doctorant à l'Université Paris-Saclay, à Orsay et au CEA, à Palaiseau), D. Collignon (attaché statisticien hors classe au département informatique et télécommunications pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), N. Didrit (professeur de mathématiques et informatique au Lycée La Salle-Passy Buzenval, à Rueil-Malmaison), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon), T. Ravary (enseignant au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau), C. Romon (secrétaire général de la Mission interministérielle pour la qualité des constructions publiques, à La Défense), l'équipe formée par C. Henry (1ère au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau) et A. Mehoued (1ère au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau), l'équipe formée par M. Domergue (1ère au Lycée Vaugelas, à Chambéry) et G. A. Faraj (Tle au Lycée Nevers, à Montpellier), l'équipe formée par C. Cedillo-Vayson de Pradenne (Tle au Lycée Jean de la Fontaine, à Paris) et A. Lemarié (Tle au Lycée Jean de la Fontaine, à Paris), l'équipe formée par I. Israël (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Perdriaud (LDD1 info-math à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et T. Saïdi-Pankow (Tle au Lycée Jean-Pierre Vernant, à Sèvres), l'équipe formée par S. Bakayoko (1ère Master ingénieur civil à l'Ecole Royale Militaire, à Bruxelles) et N. E. Polneau (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), l'équipe formée par J. Clement-Cottuz (M1 mathématiques appliquées à l'Université Grenoble Alpes, à Grenoble) et L. Vanhaelewyn (L3 à l'ENS, à Paris), l'équipe formée par M. Baccara (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris, M1 à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, à Paris), S. Baumert (césure, à Paris) et P. Boureau (M1 à l'ENS, à Paris).

Solution du problème 16 : Montrons qu'il n'existe pas d'entier $a > 0$ tel que $f(a) = 1$. Si c'était le cas, alors en prenant $m = n = a$ dans l'équation de l'énoncé, on aurait $f(a)^2 = f(2a)^2$, ce qui contredirait l'injectivité de f.
En prenant $m = n$ dans l'équation, on obtient $f^{[f(n)]}(n) = f(2n)$ et comme f est injective, cela donne $f^{[f(n)-1]}(n) = 2n$ (*), de sorte que tous les entiers pairs sont atteints par f. Remarquons au passage que pour tout n, l'entier $2n$ appartient à l'ensemble des images itérées $\{f^{[k]}(n), k \geq 0\}$ de n, et par récurrence $2^{\ell}n$ appartient aussi à cet ensemble pour tout $\ell \geq 1$. Ainsi, cet ensemble est infini, et pour tout n il n'existe pas de $k > 0$ tel que $f^{[k]}(n) = n$ (P). Maintenant, soit $b > 0$ l'unique entier tel que $f(b) = 2$. L'équation (*) avec $n = b$ donne alors $f(b) = 2b$, de sorte que $b = 1$: on a montré que $f(1) = 2$.

Soit $a > 1$ tel que $f(a+1) = 4$. L'équation de l'énoncé avec $m = 1$ et $n = a$ donne $f(f(a))f^{[f(a)]}(1) = f(a+1)^2 = 16$ (**). Donc $f(f(a))$ est une puissance de 2, qui n'est pas 1, ni 2 car $f(f(a)) = 2$ impliquerait $f(a) = 1$. Donc $f(f(a)) \geq 4$. De même, $f^{[f(a)]}(1)$ est une puissance de 2, qui n'est pas 1, ni 2 car $f^{[f(a)]}(1) = 2$ impliquerait $f^{[f(a)-1]}(1) = 1$ donc $f(a) = 1$. Par conséquent $f^{[f(a)]}(1) \geq 4$ et l'égalité (**) implique que $f(f(a)) = 4 = f^{[f(a)]}(1)$. Mais comme $f(a+1) = 4$, on a aussi $f(f(a)) = f(a+1)$ donc $f(a) = a+1$. D'autre part, on a $f^{[f(a)-1]}(2) = 4$, mais l'équation de l'énoncé avec $m = n = 2$ donne $f^{[f(2)-1]}(2) = 4$, de sorte que par (P) on doit avoir $f(a) - 1 = f(2) - 1$ et donc $a = 2$: on a montré que $f(2) = 3$.
Montrons que $f(n) = n+1$ par récurrence sur n. Nous l'avons déjà montré pour $n = 1$ et $n = 2$. Supposons que $f(k) = k+1$ pour tout $k < 2n-1$, et montrons cette propriété pour $k = 2n-1$ et $k = 2n$. L'équation (*) donne $f^{[f(n)-1]}(n) = 2n$ mais le membre de gauche est par hypothèse de récurrence $f^{[n]}(n) = f(2n-1)$, de sorte que $f(2n-1) = 2n$. D'autre part, l'équation de l'énoncé avec $m = 2$ et n remplacé par $2n-1$ donne $f^{[f(2)]}(2n-1)f^{[f(2n-1)]}(2) = f(2n+1)^2$, ou encore $f^{[3]}(f^{[2n-2]}(1))f^{[2n]}(f(1)) = f(2n+1)^2$, de sorte que $f^{[2n+1]}(1) = f(2n+1)$. Ainsi, $f^{[2]}(2n) = f(2n+1)$ et donc $f(2n) = 2n+1$ comme souhaité.
En conclusion, seule la fonction f définie par $f(n) = n+1$ pour tout $n > 0$ peut convenir, et on vérifie aisément qu'elle vérifie bien l'équation de l'énoncé.

Ont fourni une solution correcte : C. Metz (doctorant à l'Université Paris-Saclay, à Orsay et au CEA, à Palaiseau), D. Collignon (attaché statisticien hors classe au département informatique et télécommunications pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), N. Didrit (professeur de mathématiques et informatique au Lycée La Salle-Passy Buzenval, à Rueil-Malmaison), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon), T. Ravary (enseignant au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau), C. Romon (secrétaire général de la Mission interministérielle pour la qualité des constructions publiques, à La Défense), l'équipe formée par I. Israël (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Perdriaud (LDD1 info-math à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et T. Saïdi-Pankow (Tle au Lycée Jean-Pierre Vernant, à Sèvres), l'équipe formée par S. Bakayoko (1ère Master ingénieur civil à l'Ecole Royale Militaire, à Bruxelles) et N. E. Polneau (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), l'équipe formée par J. Clement-Cottuz (M1 mathématiques appliquées à l'Université Grenoble Alpes, à Grenoble) et L. Vanhaelewyn (L3 à l'ENS, à Paris), l'équipe formée par M. Baccara (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris, M1 à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, à Paris), S. Baumert (césure, à Paris) et P. Boureau (M1 à l'ENS, à Paris).