Marathon d'Orsay de Mathématiques

Février 2016

Voici les 3 problèmes suivants, dont les solutions sont attendues au plus tard le **jeudi 25 février 2016 à 14h**, via `marathon.orsay@math.u-psud.fr` ou la boîte en carton au rez-de-chaussée du bâtiment 425.

Problème 7

Le circuit du Marathon de la Vallée de Chevreuse est une alternance de deux types de tronçons : des sentiers boueux le long de l'Yvette et des routes asphaltées. Parmi les participants figurent 10 mathématiciens, qui courent à vitesse constante mais dépendant du coureur et du type de terrain (il y a donc 20 vitesses différentes décrivant le mouvement de ces 10 coureurs). Les participants, chronométrés par une puce dans leur dossard, quittent la ligne de départ à des instants différents. En des endroits distincts du circuit se sont placés 2500 spectateurs immobiles. Après la fin de la course, on constate que les 10 mathématiciens ne se sont jamais dépassés à hauteur d'un spectateur. Démontrer que 3 spectateurs ont vu passer les 10 mathématiciens dans exactement le même ordre.

Problème 8

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaisant

$$f(xf(y) + y) = yf(x) + f(y)$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

Problème 9

On veut recouvrir entièrement les six faces d'un cube au moyen de triangles en papier (mais dont les formes précises sont laissées libres). On peut plier les triangles en papier le long des arêtes du cube, mais pas les déchirer ni les superposer entre eux ou avec eux-mêmes. Toute la surface des triangles en papier doit être appliquée sur les faces du cube. Combien de triangles en papier faudra-t-il utiliser au minimum ?

Voici les solutions des problèmes précédents, avec les noms de ceux qui ont fourni une solution correcte. Félicitations à Thomas Buc-d'Alché et à Pierre Marc, du Lycée Blaise Pascal, qui ont résolu les problèmes 4 et 6.

Solution du problème 4 : Pour toute numérotation de l'échiquier, considérons une suite de cases adjacentes allant de la case 1 à la case 100, de longueur minimale. Puisque l'échiquier est de taille 10×10, un tel chemin comporte au plus 10 cases (y compris les cases 1 et 100). En suivant ce chemin, on passe du numéro 1 au numéro 100 (différence 99) en au plus 9 sauts, de sorte qu'au moins un saut correspond à une différence supérieure ou égale à 11. Par conséquent $\Delta \geq 11$ pour toute numérotation.
D'autre part, on peut numéroter les cases de 1 à 100 en parcourant les lignes de haut en bas, et chaque ligne de gauche à droite. Cette numérotation a $\Delta = 11$, de sorte que le minimum recherché est 11.

Ont fourni une solution correcte : T. Buc-d'Alché (Terminale, Lycée Blaise Pascal), P. Marc (MPSI, Lycée Blaise Pascal), S. Bourguignon, S. Filippas (L1 MPI), P. Frixons, A. Segovia (L3 MFA), P. Jiménez, Q. Manière (L3 MFA + magist.), M. Brunet (M1 phys fond + L3 MFA), C. Lemonnier (M1 MF), M. Flammarion, C. Zhangchi (M1 MF + magist.), I. Konan (M2 AAG).

Solution du problème 5 : La puissance de 3 recherchée est 9 fois la plus grande puissance de 3 divisant n. La plupart des participants ont obtenu ce résultat via des propriétés avancées de la valuation 3-adique et de longs calculs, mais nous donnons ici une solution entièrement élémentaire, basée sur le critère bien connu de divisibilité par 3 ou 9 : un entier est divisible par 3 ou 9 si et seulement si la somme de ses chiffres (en base 10) l'est. Ecrivons l'entier n sous la forme $n = 3^\alpha k$, avec k non divisible par 3. Le nombre $N = (10^n - 1)/9$ s'écrit en base 10 avec n chiffres 1 consécutifs. En regroupant ces chiffres 1 trois par trois, on exprime N comme le produit de 111 avec un nombre composé de $3^{\alpha-1}k$ chiffres 1 espacés par $3^1 - 1$ zéros. En regroupant encore les chiffres 1 du dernier facteur trois par trois $\alpha - 1$ fois de suite, on exprime N comme le produit de facteurs composés de trois chiffres 1 espacés de $3^i - 1$ zéros, pour $i = 0, \ldots, \alpha - 1$, et d'un dernier facteur composé de k chiffres 1 espacés de $3^\alpha - 1$ zéros. Par le critère de divisibilité par 3 ou 9 rappelé ci-dessus, chacun des α premiers facteurs est divisible par 3 mais pas par 9, et le dernier facteur n'est pas divisible par 3. Au total, la plus grande puissance de 3 divisant $10^n - 1 = 9N$ est donc $3^{\alpha+2}$.

Ont fourni une solution correcte : S. Bourguignon, S. Filippas (L1 MPI), P. Frixons, A. Segovia (L3 MFA), P. Azmiya, P. Jiménez, Q. Manière (L3 MFA + magist.), C. Lemonnier (M1 MF), M. Flammarion, C. Zhangchi (M1 MF + magist.), I. Konan (M2 AAG).

Solution du problème 6 : Il est possible de damer le pion à Hokus en un temps fini, au moyen de la stratégie suivante. On essaie les gobelets un à un en parcourant toute la rangée dans un sens. Si après cela on n'a pas encore trouvé la bille, c'est qu'elle se trouvait constamment sous un gobelet à distance impaire du gobelet soulevé : c'est la seule possibilité pour que la bille puisse croiser le balayage effectué. On rebalaye alors toute la rangée dans le même sens, en commençant par le premier gobelet si n est impair et par le deuxième gobelet si n est pair, de sorte que la bille soit constamment sous un gobelet situé à distance paire du gobelet soulevé. Cette fois, la bille ne pourra plus croiser le balayage et on la trouvera au plus tard à la fin de celui-ci.

Ont fourni une solution correcte : T. Buc-d'Alche (Terminale, Lycée Blaise Pascal), P. Marc (MPSI, Lycée Blaise Pascal), S. Bourguignon (L1 MPI), P. Frixons (L3 MFA), P. Jiménez, Q. Manière (L3 MFA + magist.), C. Lemonnier (M1 MF), M. Flammarion (M1 MF + magist.), I. Konan (M2 AAG).