Marathon d'Orsay de Mathématiques

Février 2017

Voici les 3 problèmes suivants, dont les solutions sont attendues au plus tard le **lundi 27 février 2017 à 14h**, via `marathon.orsay@math.u-psud.fr` ou la boîte en carton au rez-de-chaussée du bâtiment 425.

Problème 7

On considère 6 points distincts dans le plan, tels que toute paire de points est séparée par une distance inférieure ou égale à L et supérieure ou égale à ℓ. Montrer que $L/\ell \geq \sqrt{3}$.

Problème 8

Une queue de 2017 personnes est composée exclusivement de deux sortes d'individus : les menteurs, qui ne font que mentir, et les sincères, qui disent toujours la vérité. Chacune de ces 2017 personnes dit : "Il y a strictement plus de menteurs devant moi que de sincères derrière moi". Déterminer, si possible, qui sont les menteurs et les sincères.

Problème 9

Jyn et Cassian doivent manoeuvrer un bras mécanique qui peut se placer devant des niches numérotées par les entiers de 0 à 5000, afin d'attraper un disque de données se trouvant dans l'une des niches. Seules les niches de 0 à 2017 contiennent un disque, les autres sont vides. Le bras est initialement placé devant la niche 0, mais la plupart des commandes pour le bras ont été détruites. Jyn peut juste appuyer sur un bouton qui déplace le bras de la niche x à la niche $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$, où $\lfloor r \rfloor$ désigne la partie entière du réel r. Cassian ne peut qu'actionner une manette qui déplace le bras de la niche x à la niche $4x+1$, à condition que $4x+1 \leq 5000$. Le numéro de la niche dans laquelle se trouve le bon disque à récupérer leur sera bientôt révélé par K-2SO (tous les disques possibles ont a priori la même probabilité d'être le bon). Quelle est la probabilité qu'en actionnant intelligemment les commandes qui leur sont disponibles, Jyn et Cassian parviendront alors à récupérer le bon disque ?

Voici les solutions des problèmes précédents, avec les noms de ceux qui ont fourni une solution correcte. Félicitations à Nicolas Déhais, en seconde au Lycée Blaise Pascal, qui a résolu les problèmes 4 et 6.

Solution du problème 4 : Remarquons que, dans une solution optimale, on ne peut pas retirer un même nombre N de jetons pendant plus de 2 jours, car sinon on obtient une solution plus courte en retirant $2N$ jetons en un jour plutôt que 2 fois N jetons en 2 jours. Les nombres de jetons retirés chaque jour sont des puissances de 2, allant de 2^0 à 2^k pour un certain entier k, chaque puissance de 2 apparaissant 1 ou 2 fois. Par conséquent, $\sum_{i=0}^{k} 2^i \leq 2016 \leq 2\sum_{i=0}^{k} 2^i$. Le seul entier k satisfaisant à ces inégalités est $k = 9$. Si on note n_i le nombre de jours où l'on retire 2^i jetons, on a alors $\sum_{i=0}^{9}(n_i - 1)2^i = 2016 - \sum_{i=0}^{9} 2^i = 2016 - 1023 = 993$. Les entiers $n_i - 1$ (qui valent 0 ou 1) sont donc donnés par l'écriture binaire de 993, qui est 1111100001. On peut donc retirer 2016 jetons en au minimum $10 + 6 = 16$ jours.

Ont fourni une solution correcte : N. Déhais (2nde, Blaise Pascal), A. Napame (L3 MFA + magist.), C. Lemonnier (M2 agrégation), I. Konan (M2 optimisation), B. Ghamit (M2 AAG + magist.), T. Paolantoni (doctorant), M. Andrieu et L. Vivion (M2 math discr. à Marseille et M2 math fonda à Nice), O. Stietel (enseign. math/info en Inde).

Solution du problème 5 : Il n'existe pas de telle fonction lorsque $c \leq \frac{1}{4}$. Dans ce cas, le polynôme $x^2 - x + c$ a deux racines réelles $a \leq b$ (confondues lorsque $c = \frac{1}{4}$). Lorsque $c < 0$, on considère $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ : x \mapsto \sqrt{x-c}$. Suivant que $x_0 < b$ ou $x_0 > b$, la suite définie par $x_{i+1} = g(x_i)$ sera croissante ou décroissante mais convergera toujours vers b. Lorsque $c \geq 0$, on considère d'une part $h : [0, b[\to [0, b[: x \mapsto x^2 + c$. Suivant que $0 < x_0 < a$ ou $a < x_0 < b$, la suite définie par $x_{i+1} = h(x_i)$ sera croissante ou décroissante mais convergera toujours vers a. On considère d'autre part $g :]b + \infty[\to]b, +\infty[: x \mapsto \sqrt{x-c}$. Pour tout $x_0 > b$, la suite définie par $x_{i+1} = g(x_i)$ sera décroissante et convergera vers b. Par hypothèse, $f(x) = f(g(x)) = f(h(x))$, de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on doit avoir $f(x) = f(a)$ ou $f(b)$. Mais comme f est continue, on doit aussi avoir $f(a) = f(b)$. Enfin, comme $f(-x) = f(x^2 + c) = f(x)$, f est constante sur $\mathbb{R}$.
Lorsque $c > \frac{1}{4}$, on remarque que $\mathbb{R}_+$ est partitionné en les intervalles $h^i([0, c[)$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots$ On choisit une fonction continue non constante $f : [0, c] \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = f(c)$, puis on l'étend à $\mathbb{R}_+$ par $f \circ h^{-i}$ sur $h^i([0, c[)$. On l'étend enfin à $\mathbb{R}$ par $f(x) = f(-x)$ pour tout $x < 0$. On obtient ainsi une fonction satisfaisant aux conditions de l'énoncé.

Ont fourni une solution correcte : B. Duvocelle, I. Konan (M2 optimisation), C. Zhangchi (M2 AAG), B. Ghamit (M2 AAG + magist.), M. Andrieu et L. Vivion (M2 math discr. à Marseille et M2 math fonda à Nice).

Solution du problème 6 : Supposons par l'absurde que l'on puisse placer les reines sans qu'elles ne puissent s'attaquer, en laissant le morceau 64×64 en haut à gauche vide. Comme chaque ligne peut contenir au plus une reine, et qu'il y a 128 lignes et 128 reines, chaque ligne doit contenir exactement une reine. Donc pour peupler les 64 lignes du haut, il doit y avoir exactement 64 reines dans le morceau 64×64 en haut à droite. En raisonnant de même avec les colonnes, il doit y avoir exactement 64 reines dans le morceau 64×64 en bas à gauche (et donc aucune reine dans le morceau 64×64 en bas à droite). Il y a exactement $64 + 63 = 127$ diagonales montant vers la droite qui traversent les deux morceaux contenant des reines. Comme il y a 128 reines à y placer, deux d'entre elles au moins seront sur une même diagonale et pourront s'attaquer, une contradiction.

Ont fourni une solution correcte : N. Déhais (2nde, Blaise Pascal), A. Napame (L3 MFA + magist.), C. Lemonnier (M2 agrégation), B. Duvocelle, I. Konan (M2 optimisation), C. Zhangchi (M2 AAG), B. Ghamit (M2 AAG + magist.), M. Andrieu et L. Vivion (M2 math discr. à Marseille et M2 math fonda à Nice), O. Stietel (enseign. math/info en Inde).