Marathon d'Orsay de Mathématiques

Février 2020

Voici les énoncés des problèmes suivants, dont les solutions sont attendues au plus tard le **lundi 24 février 2020 à 14h**, par la poste (voir l'adresse sur http ://www.math.u-psud.fr/marathon), par email à `marathon.orsay@math.u-psud.fr` ou déposées dans une boîte en carton prévue à cet effet au rez-de-chaussée du bâtiment 307, dans la salle des casiers à courrier située à droite du grand hall, juste après avoir franchi l'entrée principale.

Nous vous rappelons que pour que vos solutions puissent être considérées comme correctes, il est indispensable que vous justifiez très soigneusement vos réponses, comme dans une démonstration. Si vous répondez à plusieurs problèmes, il vous est demandé de le faire sur des feuilles séparées. Merci d'indiquer clairement votre nom, prénom, année d'études (ou statut), établissement, ville et adresse email.

Problème 9 (semi et complet)

Rey et Ben décident d'unir leurs forces dans la bataille finale contre Palpatine. Tous les trois sont placés autour d'un grand amas formé par 144 blocs de pierre. Sur le 144$^{\text{e}}$ bloc qui est tout en-dessous, et auquel on ne peut accéder qu'en retirant d'abord tous les autres blocs, est gravé le code permettant de lancer la flotte de Palpatine pour asservir la galaxie. Chacun à son tour, en commençant par Palpatine, puis Rey, puis Ben, et ainsi de suite, doit soulever et retirer un ou plusieurs blocs. Rey et Ben peuvent chacun prendre un ou deux blocs à la fois. Palpatine, qui est plus puissant, peut en prendre un, deux ou trois. Rey et Ben peuvent-ils convenir d'une stratégie commune pour que l'un des deux puisse prendre le dernier bloc à coup sûr, afin d'empêcher Palpatine de réaliser ses sinistres plans ?

Problème 10 (semi et complet)

Une tribu isolée est constituée d'un chef et de 2020 autres membres. Il y a trois types d'individus dans cette tribu : les sincères qui disent toujours la vérité, les menteurs qui mentent toujours, et les conformistes qui suivent toujours l'avis de la majorité des personnes ayant parlé avant eux (en cas d'égalité un conformiste tire sa réponse au sort). Tous les membres de la tribu se connaissent bien et savent de quel type d'individus est chacun. Le chef, qui est sincère, réunit tout le monde, se pose à lui-même la question “Y a-t-il strictement plus de menteurs que de sincères parmi nous ?” et y répond publiquement. Suivant un rituel ancestral, il pose ensuite la même question au reste de la tribu. Tous les membres répondent à haute voix, un à la fois. A la fin, le chef comptabilise (sans se compter lui-même) exactement 1010 réponses positives et 1010 réponses négatives. Combien peut-il y avoir au maximum de conformistes dans cette tribu ?

Problème 11 (complet)

Les participants à un jeu télévisé reçoivent chacun une même liste de 50 nombres entiers positifs et ont tous un score initial égal à 1. Lorsque c'est à son tour de jouer, chaque participant choisit et lit à haute voix deux nombres qui seront rayés de sa propre liste. L'ordinateur du jeu additionne alors le premier nombre avec le double du deuxième nombre, et multiplie le score de ce participant par la somme ainsi obtenue. Les participants jouent chacun à tour de rôle jusqu'à ce que toutes leurs listes soient épuisées. Quelle stratégie faut-il appliquer pour être certain d'obtenir un score supérieur ou égal à celui des autres participants ?

Problème 12 (complet)

On considère un triangle acutangle XYZ dont les côtés sont de longueurs toutes différentes. Les points symétriques du barycentre B et du centre C du cercle circonscrit à XYZ par rapport aux côtés YZ, ZX et XY sont appelés B_1, B_2, B_3 et C_1, C_2, C_3 respectivement. Est-il vrai que les cercles circonscrits aux triangles B_1B_2Z, B_1YB_3, XB_2B_3, C_1C_2Z, C_1YC_3, XC_2C_3 et XYZ ont toujours un point en commun ?