

MARATHON D'ORSAY DE MATHÉMATIQUES

Février 2026

Le Marathon d'Orsay de Mathématiques est une activité mathématique et ludique qui vous est proposée en dehors de tout cadre d'études. Vous trouverez quelques problèmes de mathématiques ci-dessous. Leur résolution ne relève pas de l'application de recettes enseignées dans des cours avancés, mais nécessite plutôt une réflexion approfondie et une adaptation aux situations nouvelles.

Pour résoudre ces problèmes correctement, il vous est demandé de justifier très soigneusement vos réponses, comme dans une démonstration. Vos solutions peuvent être envoyées par email à marathon.orsay.math@gmail.com.

Si vous répondez à plusieurs problèmes, il vous est demandé de le faire dans des fichiers séparés. Toutes les solutions doivent nous parvenir au plus tard le **dimanche 15 mars 2026 à 23h59**. Les solutions reçues tardivement ne seront plus prises en considération. Merci d'indiquer clairement votre nom, prénom, année d'études (ou statut), établissement, ville de cet établissement et adresse email (pour recevoir les problèmes suivants). Ceux qui souhaitent recevoir les énoncés des problèmes suivants sans fournir de solutions pour les problèmes ci-dessous, peuvent le demander à l'adresse email ci-dessus.

Les noms de ceux ayant fourni une solution correcte seront listés avec la solution officielle. Tous les participants ayant résolu au moins un problème durant l'année 2025–2026 seront invités à la grande remise des prix à Orsay en fin d'année.

Problème 1 (semi et complet)

Trois aventurières mathématiciennes sont entrées par hasard dans un pays inconnu, gouverné par une reine farceuse. Capturées rapidement, elles sont présentées à la reine, qui, pour décider de leur sort, leur propose un petit jeu de réflexion. Devant elles se trouvent deux boîtes mystérieuses : la première contient 2 billes noires et 1 bille blanche, tandis que la deuxième contient 2 billes blanches et 1 bille noire. Les captives joueront dans l'ordre choisi par la reine, l'une après l'autre. Chacune doit tirer une bille au hasard dans l'une des boîtes, au choix, sans la remettre dans la boîte. Si la bille tirée est blanche, elle est aussitôt libérée. Sinon, elle est emprisonnée. Chacune peut observer ce que les précédentes ont fait et les billes qu'elles ont tirées. Malignes comme elles sont, elles choisiront toujours, bien sûr, la boîte qui maximisera leurs chances de tirer une bille blanche. Qui a le plus de chances de s'en sortir : la deuxième ou la troisième aventurière ?

Précision : les boîtes sont si mystérieuses et la reine si farceuse que les aventurières n'ont aucun moyen de savoir quelle boîte contient 2 billes noires et 1 bille blanche, ni quelle boîte contient 2 billes blanches et 1 bille noire.

Problème 2 (semi et complet)

On considère un demi-cercle de centre O , limité par deux points A et B . Pour un certain entier $n \geq 1$, on divise ce demi-cercle en $2n + 1$ arcs de mêmes longueurs, au moyen des points $A = P_0, P_1, \dots, P_{2n}, P_{2n+1} = B$ nommés dans cet ordre en parcourant le demi-cercle. Pour tout $k = 1, \dots, n$, on appelle Q_k et R_k le point d'intersection de la droite $P_k P_{2n+1-k}$ avec la droite OP_n et la droite OP_{n+1} respectivement. Montrer que la somme des longueurs des segments $Q_k R_k$, pour k allant de 1 à n , est égale au rayon du demi-cercle.

Problème 3 (complet)

Pour un entier $N \geq 1$, on considère l'ensemble E de tous les entiers qui se terminent par 1, 3, 7 ou 9, et qui sont compris entre 0 et $30N$. Trouver le plus petit entier m pour lequel, dans tout sous-ensemble de E avec m éléments, on peut trouver deux éléments tels que l'un est un multiple entier de l'autre.

Problème 4 (complet)

Benjamin et Alicia jouent à pile ou face de la manière suivante. Benjamin choisit un mot de trois lettres choisies parmi P et F. Alicia, qui connaît le mot choisi par Benjamin, choisit alors un autre mot de trois lettres choisies parmi P et F. Ensuite, Benjamin et Alicia lancent autant de fois que nécessaire une pièce de monnaie, qui peut tomber sur pile (P) ou sur face (F) de manière équiprobable, et notent de gauche à droite les lettres ainsi obtenues. La personne dont le mot choisi apparaît en premier (c'est-à-dire le plus à gauche) dans cette suite de lettres gagne le jeu.

Montrer que, quel que soit le mot choisi par Benjamin, Alicia peut choisir le sien de manière à avoir strictement plus d'une chance sur deux de remporter la partie.