Marathon d'Orsay de Mathématiques

Résultats de la troisième vague de janvier 2019

Voici les solutions de la troisième vague de problèmes, avec les noms des participants qui ont fourni une solution correcte.

Solution du problème 9 : Yvette gagnera à coup sûr si elle applique la stratégie suivante. A chaque fois que Xavier colorie une arête du dé, Yvette colorie l'arête opposée (par rapport au centre de symétrie de l'octaèdre régulier) de la même couleur. De cette manière, le dé sera toujours colorié symétriquement après qu'Yvette ait joué. Quand Xavier joue, il doit donc entamer une nouvelle paire d'arêtes opposées, de sorte que l'autre arête est toujours libre pour le tour d'Yvette. De plus, le coloriage étant symétrique, si Xavier a le droit de colorier une arête d'une certaine couleur, alors Yvette a nécessairement le droit de colorier l'arête opposée de la même couleur. Avec cette stratégie, Yvette a la garantie de pouvoir jouer à chaque fois que c'est son tour. C'est donc Xavier qui se retrouvera coincé le premier et qui perdra la partie.

Ont fourni une solution correcte : A. Delmotte (1ère S au Lycée Corneille, La Celle-Saint-Cloud), E. Bourroux (Tle S au Lycée Saint-Louis Saint-Clément, Viry-Chatillon), P. Breuil (Tle S au Lycée Michelet, Vanves), J. de Sainte Marie (Tle S au Lycée Blaise Pascal, Orsay), N. Déhais (Tle S au Lycée Blaise Pascal, Orsay), L. Kobilinsky (Tle S au Lycée Michelet, Vanves), T. Vargenau (Tle S au Lycée René Cassin, Arpajon), I. Vulcanescu (Tle S au Lycée Saint-Louis Saint-Clément, Viry-Chatillon), H.-A. Ngo (1ère bachelor, Ecole Polytechnique, Palaiseau), F. M. Tchouli (1ère bachelor, Ecole Polytechnique, Palaiseau), D. Girault (M1 MF + magist. à l'Université Paris-Sud, Orsay), M. Farid (M2 modélisation aléatoire à l'Université Paris-Diderot, Paris), Q. Manière (M2 LMFI à l'Université Paris-Diderot, Paris), B. Duvocelle (doctorant à la School of business and economics, Maastricht University), C. Moulin (doctorante à l'Université Paris-Sud, Orsay), D.-L. Vu (doctorant à l'Institut de Physique Théorique du CEA, Gif-sur-Yvette), C. Lemonnier (Prof agrégée au Lycée Le Verrier, Saint-Lô).

Solution du problème 10 : Comptons les jetons de tous les joueurs avec un coefficient de pondération égal à 0 pour le premier joueur, à 1 pour le deuxième joueur et à 2 pour le troisième joueur. Ainsi, dans la situation initiale, on comptera $0 \times 2018 + 1 \times 2019 + 2 \times 2020 = 6059$. A la fin de chaque partie de cartes, ce comptage est modifié de la manière suivante : si le premier joueur gagne, le comptage change de $0 \times 2 + 1 \times (-1) + 2 \times (-1) = -3$, si le deuxième joueur gagne, le comptage change de $0 \times (-1) + 1 \times 2 + 2 \times (-1) = 0$, si le troisième joueur gagne, le comptage change de $0 \times (-1) + 1 \times (-1) + 2 \times 2 = 3$. Dans tous les cas, le comptage est modifié par un multiple de 3. Si l'un des joueurs se retrouvait en possession de tous les jetons, le comptage serait 0, 1 ou 2 fois le nombre total de jetons 6057, qui est un multiple de 3. Mais comme le comptage initial 6059 n'est pas un multiple de 3, il est impossible qu'il le devienne. Il est donc impossible qu'un joueur se retrouve en possession de tous les jetons.

Ont fourni une solution correcte : A. Bigot (1ère S au Lycée Notre Dame du Grandchamp, Versailles), A. Corbineau (1ère S au Lycée Saint Charles, Athis-Mons), A. Delmotte (1ère S au Lycée Corneille, La Celle-Saint-Cloud), C.-M. Stucki (1ère S au Lycée Notre Dame du Grandchamp, Versailles), M. Baccara (Tle S au Lycée Saint-Louis Saint-Clément, Viry-Chatillon), A. Bonnet (Tle S au Lycée Michelet, Vanves), T. Boquet (Tle

S au Lycée Louis Bascan, Rambouillet), E. Bourroux (Tle S au Lycée Saint-Louis Saint-Clément, Viry-Chatillon), P. Breuil (Tle S au Lycée Michelet, Vanves), J. de Sainte Marie (Tle S au Lycée Blaise Pascal, Orsay), N. Déhais (Tle S au Lycée Blaise Pascal, Orsay), S. Kerbourc'h (Tle S au Lycée Michelet, Vanves), L. Kobilinsky (Tle S au Lycée Michelet, Vanves), T. Vargenau (Tle S au Lycée René Cassin, Arpajon), I. Vulcanescu (Tle S au Lycée Saint-Louis Saint-Clément, Viry-Chatillon), H.-A. Ngo (1ère bachelor, Ecole Polytechnique, Palaiseau), D. Girault (M1 MF + magist. à l'Université Paris-Sud, Orsay), D. Albertin (M2 maths-info à l'Université Paris-Est, Marne-la-Vallée), M. Farid (M2 modélisation aléatoire à l'Université Paris-Diderot, Paris), Q. Manière (M2 LMFI à l'Université Paris-Diderot, Paris), A. Napame (M2 agreg à l'Université Paris-Sud, Orsay), B. Duvocelle (doctorant à la School of business and economics, Maastricht University), C. Moulin (doctorante à l'Université Paris-Sud, Orsay), D.-L. Vu (doctorant à l'Institut de Physique Théorique du CEA, Gif-sur-Yvette), C. Lemonnier (Prof agrégée au Lycée Le Verrier, Saint-Lô).

Solution du problème 11 : Notons a la proportion de pochettes contenant une photo de Rey, b pour Finn et c pour Poe. Soit p_n la probabilité que Frédéric n'ait pas obtenu une photo de l'ensemble des 3 personnages principaux après n achats. On a

$$\begin{aligned} p_n &= P[\text{pas de Rey en } n \text{ fois}] + P[\text{pas de Finn en } n \text{ fois}] + P[\text{pas de Poe en } n \text{ fois}] \\ &\quad - P[\text{pas de Rey ni de Finn en } n \text{ fois}] - P[\text{pas de Rey ni de Poe en } n \text{ fois}] \\ &\quad - P[\text{pas de Finn ni de Poe en } n \text{ fois}] + P[\text{aucun des 3 en } n \text{ fois}]. \end{aligned}$$

La probabilité de ne pas avoir Rey en n fois est $(1-a)^n$. De même, les autres probabilités dans la formule ci-dessus sont $(1-b)^n$, $(1-c)^n$, $(1-a-b)^n$, $(1-a-c)^n$, $(1-b-c)^n$ et $(1-a-b-c)^n$. Le nombre d'achats que Frédéric devra effectuer en moyenne pour compléter sa collection est $N = \sum_{n=1}^{\infty} n \times (p_{n-1} - p_n) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n$. La somme des probabilités concernant Rey est $\frac{1}{a}$, et les autres sommes s'obtiennent de même comme limite d'une série géométrique. On obtient donc $N = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+c} - \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b+c}$. Avec $a = 1/3$, $b = 1/4$ et $c = 1/6$, cela donne $N = 8,219\ldots$ de sorte que Frédéric devra débourser en moyenne $8,22$ euros.

Ont fourni une solution correcte : N. Déhais (Tle S au Lycée Blaise Pascal, Orsay), D. Girault (M1 MF + magist. à l'Université Paris-Sud, Orsay), D. Albertin (M2 maths-info à l'Université Paris-Est, Marne-la-Vallée), Q. Manière (M2 LMFI à l'Université Paris-Diderot, Paris), A. Napame (M2 agreg à l'Université Paris-Sud, Orsay), B. Duvocelle (doctorant à la School of business and economics, Maastricht University), C. Moulin (doctorante à l'Université Paris-Sud, Orsay), D.-L. Vu (doctorant à l'Institut de Physique Théorique du CEA, Gif-sur-Yvette).

Solution du problème 12 : Si aucune droite ne contenait 3 points rouges, alors il y aurait exactement $\frac{65\times 64}{2} = 2080$ droites contenant 2 points rouges. Supposons par l'absurde que toutes les 2019 droites ne contiennent que 2 ou 3 points rouges. A chaque fois que l'on a 3 points rouges alignés, on a une seule droite qui les contient tous les trois plutôt que $\binom{3}{2} = 3$ droites en contenant une paire parmi ces 3 points. Le nombre de droites contenant au moins deux points rouges serait donc égal à $2080 - 2n_3$, où n_3 est le nombre de droites contenant 3 points rouges. Mais ce nombre est pair quel que soit n_3, alors que 2019 est impair, d'où l'impossibilité de ne contenir que 3 points rouges au maximum. Il existe donc une droite contenant au moins 4 points rouges.
Construisons maintenant une configuration de 65 points rouges telle qu'aucune droite n'en contient 5. Soient n_3 le nombre de droites contenant 3 points rouges et n_4 le nombre de droites contenant 4 points rouges. A chaque fois que 4 points rouges sont alignés, on a une seule droite qui les contient tous les quatre plutôt que $\binom{4}{2} = 6$ droites en contenant une paire parmi ces 4 points. Le nombre de droites contenant au moins deux points rouges est

donc égal à $2080 - 2n_3 - 5n_4 = 2019$. Une solution possible de cette équation est $n_3 = 3$ et $n_4 = 11$. Traçons 14 droites distinctes, puis plaçons 3 points rouges sur trois de ces droites et 4 points rouges sur les onze autres droites. On place ensuite $65 - 3 \times 3 - 4 \times 11 = 12$ points rouges ailleurs dans le plan. En plaçant ces 65 points un à un en dehors des droites reliant chaque paire de points déjà placés (hormis pour les 3 triplets et les 11 quadruplets de points rouges alignés), les seuls alignements de points rouges seront ceux imposés par les 14 droites parallèles. On aura donc $2080 - 2 \times 3 - 5 \times 11 = 2019$ droites contenant au moins deux points rouges et aucune en contenant cinq.

Ont fourni une solution correcte : J. Legrand (2nde au Lycée Descartes, Montigny le Bretonneux), A. Delmotte (1ère S au Lycée Corneille, La Celle-Saint-Cloud), A. Bonnet (Tle S au Lycée Michelet, Vanves), H.-A. Ngo (1ère bachelor, Ecole Polytechnique, Palaiseau), F. M. Tchouli (1ère bachelor, Ecole Polytechnique, Palaiseau), D. Girault (M1 MF + magist. à l'Université Paris-Sud, Orsay), D. Albertin (M2 maths-info à l'Université Paris-Est, Marne-la-Vallée), Q. Manière (M2 LMFI à l'Université Paris-Diderot, Paris), A. Napame (M2 agreg à l'Université Paris-Sud, Orsay), B. Duvocelle (doctorant à la School of business and economics, Maastricht University), C. Moulin (doctorante à l'Université Paris-Sud, Orsay), D.-L. Vu (doctorant à l'Institut de Physique Théorique du CEA, Gif-sur-Yvette), C. Lemonnier (Prof agrégée au Lycée Le Verrier, Saint-Lô).

UNIVERSITÉ PARIS SUD
université PARIS-SACLAY
Fondation mathématique FMJH Jacques Hadamard
cnrs