Marathon d'Orsay de Mathématiques

Janvier 2021

Voici les énoncés des problèmes suivants, dont les solutions sont attendues au plus tard le **lundi 8 février 2021 à 14h** par email à `marathon.orsay@math.u-psud.fr` ou par la poste (voir l'adresse sur https ://www.imo.universite-paris-saclay.fr/marathon). Le bâtiment 307 n'étant encore accessible qu'à très peu de personnes, la boîte en carton ne pourra pas être utilisée cette fois non plus pour le retour des solutions.

Nous vous rappelons que pour que vos solutions puissent être considérées comme correctes, il est indispensable que vous justifiez très soigneusement vos réponses, comme dans une démonstration. Si vous répondez à plusieurs problèmes, il vous est demandé de le faire sur des feuilles séparées. Merci d'indiquer clairement votre nom, prénom, année d'études (ou statut), établissement, ville et adresse email.

Problème 9 (semi et complet)

Pour commencer la formation de son nouvel élève, Luke lance un défi à Grogu. Chacun à son tour doit écrire un chiffre de 0 à 9 dans une case encore libre parmi une rangée de 7 cases initialement vides. Lorsque toutes les cases sont remplies, on obtient en base 10 un nombre entier à 7 chiffres (ou moins si celui-ci commence par un ou plusieurs zéros). Grogu remporte le défi si cet entier est un multiple de 13, sinon c'est Luke. Si Grogu joue en premier et que tous deux jouent de manière optimale, qui remportera ce défi ?

Problème 10 (semi et complet)

Zoé et Axel participent à un jeu télévisé. Dans un premier temps, Axel est enfermé dans une petite salle où il ne peut rien voir ni entendre, tandis que Zoé monte sur scène. Sous ses yeux, l'animateur insère un gros chèque dans une parmi huit enveloppes disposées sur une table. Une fois fermées, celles-ci sont parfaitement identiques, avec le rabat contre la table et le dos visible. Pour brouiller les pistes, l'animateur retourne certaines d'entre elles, qui se retrouvent le dos contre la table et le rabat visible. Avant de quitter la scène et d'être isolée à son tour, Zoé doit retourner exactement une des huit enveloppes au choix, pour tenter de laisser une indication à Axel.
Quand Axel monte sur scène, il lui faut choisir l'une des enveloppes en espérant y trouver le chèque. Comme expliqué précédemment, chacune des huit enveloppes peut se trouver dans deux positions différentes, suite aux manipulations de l'animateur puis de Zoé. Sachant que Zoé et Axel ont pu se concerter à l'avance en connaissant les règles du jeu pour convenir de la meilleure stratégie possible, quelle est la probabilité qu'Axel devine correctement ?

Problème 11 (complet)

Sophie choisit en secret 7 nombres réels $x_1, \ldots, x_7$. Elle ne révèle à Mathilde que deux informations :

$$\begin{aligned}
\sin(1)\,x_1 + \sin(2)\,x_2 + \sin(3)\,x_3 + \sin(4)\,x_4 + \sin(5)\,x_5 + \sin(6)\,x_6 + \sin(7)\,x_7 &= 1,\\
\sin(2)\,x_1 + \sin(3)\,x_2 + \sin(4)\,x_3 + \sin(5)\,x_4 + \sin(6)\,x_5 + \sin(7)\,x_6 + \sin(8)\,x_7 &= 10.
\end{aligned}$$

D'après Mathilde, quelles sont toutes les valeurs réelles que pourrait avoir l'expression

$$\sin(3)\,x_1 + \sin(4)\,x_2 + \sin(5)\,x_3 + \sin(6)\,x_4 + \sin(7)\,x_5 + \sin(8)\,x_6 + \sin(9)\,x_7 \ ?$$

Problème 12 (complet)

Soient a, b et c des nombres réels strictement positifs tels que $a + b + c = 3$. Montrer que

$$\frac{1}{2 + a^2 + b^2} + \frac{1}{2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{2 + c^2 + a^2} \leq \frac{3}{4}.$$

universite PARIS-SACLAY
FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY
FMJH
cnrs