Marathon d'Orsay de Mathématiques

Résultats de la troisième vague de janvier 2022

Voici les solutions de la troisième vague de problèmes avec les noms des participants qui ont fourni une solution correcte.

Solution du problème 9 : Les 45 carrés parfaits suffisamment proches de N sont consécutifs, et peuvent donc s'écrire a^2, $(a+1)^2, \ldots, (a+44)^2$ avec $a \geq 0$. Pour qu'ils soient tous à distance maximale 2022 d'un entier, il faut que $(a+44)^2 - a^2 \leq 2 \times 2022 = 4044$, donc que $a \leq \frac{4044-1936}{88} = 23,9\ldots$
D'autre part, pour qu'il n'y ait pas d'autre carré parfait entre $N - 2022$ et $N + 2022$, il faut distinguer deux cas. Si $N \leq 2022$, alors $a = 1$ et il faut que $45^2 \leq N + 2022 < 46^2$, c'est-à dire $3 \leq N < 94$. Donc N peut être l'un des 91 entiers de 3 à 93.
Si $N > 2022$, il faut d'abord demander que les carrés juste avant et juste après nos 45 carrés consécutifs soient trop écartés que pour être tous les deux entre $N - 2022$ et $N + 2022$, c'est-à-dire $(a + 45)^2 - (a - 1)^2 > 2 \times 2022 = 4044$, ou encore $a > \frac{4044-2024}{92} = 21,9\ldots$ de sorte que $a = 22$ ou 23.
Si $a = 22$, les 45 carrés parfaits de 22^2 à $(22 + 44)^2$ seront les seuls à se trouver entre $N - 2022$ et $N + 2022$ si et seulement si $21^2 < N - 2022 \leq 22^2$ et $66^2 \leq N + 2022 < 67^2$. Ceci donne $2463 < N \leq 2506$ et $2334 \leq N < 2467$. Donc N peut être l'un des 3 entiers de 2464 à 2466.
Si $a = 23$, les 45 carrés parfaits de 23^2 à $(23 + 44)^2$ seront les seuls à se trouver entre $N - 2022$ et $N + 2022$ si et seulement si $22^2 < N - 2022 \leq 23^2$ et $67^2 \leq N + 2022 < 68^2$. Ceci donne $2506 < N \leq 2551$ et $2467 \leq N < 2602$. Donc N peut être l'un des 45 entiers de 2507 à 2551.
Au total, l'entier choisi par Nina peut avoir l'une des 139 valeurs suivantes : de 3 à 93, de 2464 à 2466, ou de 2507 à 2551.

Ont fourni une solution correcte : L. Choné (3ème au Collège Evariste Galois, à Bourg-la-Reine), D. Kenne (Tle au Lycée Notre-Dame, à Bourg-la-Reine), V. Le Febvre de Nailly (Tle au Lycée Sainte-Ursule, à Paris), A. Chivet (MPSI au Lycée Saint-Louis, à Paris), M. Bohère (L1 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), S. Gvozdić (L1 maths-info à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), O. Sabatin (LDD2 math-phys à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), N. Déhais (L3 maths + magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), R. Khanfir (doctorant à Sorbonne Université, à Paris), J. Muller (doctorant au LAGA -Institut Galilée, à l'Université Sorbonne Paris Nord, à Villetaneuse), D. Collignon (attaché statisticien hors classe au département informatique et télécommunications pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon), C. Lemonnier (professeure au Collège Yves Montand, à Val-au-Perche), C. Romon (secrétaire général de la Mission interministérielle pour la qualité des constructions publiques, à La Défense), l'équipe formée par F. Arous (L1 maths à l'Université de Paris, à Paris) et T. De Wolf (1ère année BASc à l'Université de Paris, à Paris et au Sciences Po, à Paris), l'équipe formée par D. Arbulu Sedano (L3 info à Sorbonne Université, à Paris), M. Baccara (1ère année à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, à Paris) et S. Baumert (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris), l'équipe formée par P. Boisseau (M2 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et M. Vermeil (M2 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), l'équipe formée par E. Bonnafoux (doctorant au CMLS, à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), A. Gautier (doctorante à l'Université de Berne, à Berne) et A.-B. Ulusoy (doctorant au LIX, à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau).

Solution du problème 10 : Si $i > j$, le segment reliant les points i et j rapporte $i - j$ points à Romane. Par conséquent, son score total sera de la forme $S_1 - S_2$ où S_1 est la somme de 20 entiers entre 1 et 40 et S_2 est la somme des entiers restants. Pour maximiser cette différence, il faut sommer les 20 plus grands entiers entre 1 et 40 dans S_1 et les 20 plus petits dans S_2, ce qui donne un score total maximal de $(21-1)+(22-2)+\ldots+(40-20) = 20 \times 20 = 400$.
Romane peut atteindre ce score total maximal quelle que soit la numérotation choisie par Mathis, en suivant la stratégie suivante. Romane colorie les points 21 à 40 en rouge et les points 1 à 20 en bleu. Le cercle ayant des points de deux couleurs différentes, elle pourra toujours trouver deux points voisins de couleurs différentes. Romane les relie par un segment et les recolorie en blanc. Comme tous les points rouges ou bleus sont situés d'un seul côté de ce segment, celui-ci sera disjoint de tous les segments qui seront tracés ultérieurement. Ensuite, après chaque segment tracé, si il reste des points rouges et bleus (qui sont présents en quantités égales), Romane pourra encore trouver des points de couleurs différentes qui sont voisins (en ignorant les points blancs pour cette notion de voisinage), ce qui détermine un nouveau segment à tracer, qui sera encore disjoint des futurs segments puisque tous les points en rouge ou bleu sont situés d'un seul côté de ce segment.
Une fois tous les points rouges et bleus épuisés, le score total de Romane est S_1 - S_2 où S_1 est la somme des points rouges et S_2 est la somme des points bleus, ce qui correspond au score total maximal de 400 comme montré ci-dessus.

Ont fourni une solution correcte : L. Choné (3ème au Collège Evariste Galois, à Bourg-la-Reine), P. Duvivier (1ère au Lycée René Cassin, à Arpajon), M. Camus (Tle au Lycée Louis-le-Grand, à Paris), B. Daudin Clavaud (Tle au Lycée Henri-IV, à Paris), L. Doué (MPSI au Lycée Louis Pasteur, à Neuilly-sur-Seine), S. Gvozdić (L1 maths-info à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), O. Sabatin (LDD2 math-phys à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), R. Khanfir (doctorant à Sorbonne Université, à Paris), J. Muller (doctorant au LAGA -Institut Galilée, à l'Université Sorbonne Paris Nord, à Villetaneuse), D. Collignon (attaché statisticien hors classe au département informatique et télécommunications pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon), C. Romon (secrétaire général de la Mission interministérielle pour la qualité des constructions publiques, à La Défense), l'équipe formée par A. Joatton (Tle au Lycée du Parc, à Lyon) et C. Vacher (Tle au Lycée du Parc, à Lyon), l'équipe formée par D. Arbulu Sedano (L3 info à Sorbonne Université, à Paris), M. Baccara (1ère année à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, à Paris) et S. Baumert (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris), l'équipe formée par S. Bakayoko (3ème année ingénieur à l'Ecole Royale Militaire, à Bruxelles) et N. E. Polneau (1ère année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), l'équipe formée par J. Wang (M1 MFA à l'Université de Paris, à Paris), J. Wang (M1 MFA à l'Université de Paris, à Paris) et Z. Zhu (M1 MFA à l'Université de Paris, à Paris), l'équipe formée par P. Boisseau (M2 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et M. Vermeil (M2 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), l'équipe formée par E. Bonnafoux (doctorant au CMLS, à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), A. Gautier (doctorante à l'Université de Berne, à Berne) et A.-B. Ulusoy (doctorant au LIX, à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau).

Solution du problème 11 : Comme f est croissante, on peut montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}_0$ que $f(n+k) - f(n) \geq k$ pour tout $k, n \in \mathbb{N}_0$. C'est vrai pour $k = 1$ puisque

$f(n+1) > f(n)$. Et si $f(n+k) - f(n) \geq k$, comme $f(n+k+1) > f(n+k)$, alors $f(n+k+1) - f(n) > k$ donc $f(n+k+1) - f(n) \geq k+1$.
Posons $a = f(1)$ de sorte que $f(a) = f(f(1)) = 5$. La contrainte $f(a) - f(1) \geq a - 1$ donne $5 - a \geq a - 1$ c'est-à-dire $a \leq 3$. D'autre part, $a \geq 1$ mais $a = 1$ donnerait lieu à une contradiction entre $f(1) = 1$ et $f(a) = 5$, de sorte que $a = 2$ ou 3. Si $a = 2$, alors $f(2) = 5$, donc $f(5) = f(f(2)) = 7$. Mais alors $f(5) - f(2) = 2 < 5 - 2$, une contradiction. Donc $a = 3$, c'est-à-dire $f(1) = 3$, de sorte que $f(3) = f(f(1)) = 5$, et donc $f(2) = 4$.
Pour généraliser ces premières valeurs de f, montrons par récurrence sur a que $f(2^{a+1} + b - 3) = 3 \times 2^a + b - 3$ pour tout $a \geq 1$ et $b = 0, \ldots, 2^a$. Les valeurs de f trouvées ci-dessus montrent que c'est vrai pour $a = 1$ et $b = 0, 1$ ou 2. Pour tout $b = 0, \ldots, 2^a$, si $f(2^{a+1} + b - 3) = 3 \times 2^a + b - 3$ alors $f(3 \times 2^a + b - 3) = f(f(2^{a+1} + b - 3)) = 2^{a+2} + 2b - 3$ et ensuite $f(2^{a+2} + 2b - 3) = f(f(3 \times 2^a + b - 3)) = 3 \times 2^{a+1} + 2b - 3$. Puisque f est strictement croissante, cela impose aussi que $f(2^{a+2} + (2b+1) - 3) = 3 \times 2^{a+1} + (2b+1) - 3$ pour tout pour $b = 0, \ldots, 2^a - 1$. Au total, on a bien obtenu $f(2^{a+2} + b - 3) = 3 \times 2^{a+1} + b - 3$ pour tout $b = 1, \ldots, 2^{a+1}$.
Toute fonction f satisfaisant les conditions de l'énoncé satisfait donc aussi $f(2^{a+1} + b - 3) = 3 \times 2^a + b - 3$ ainsi que $f(3 \times 2^a + b - 3) = 2^{a+2} + 2b - 3$ pour tout $a \geq 1$ et $b = 0, \ldots, 2^a$. Comme $3 \times 2^a - 3 = 2^{a+1} + 2^a - 3$ et que $2^{a+2} - 3 = 3 \times 2^a + 2^a - 3$, ces conditions déterminent $f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$. On vérifie aisément que cette fonction f satisfait bien aux conditions de l'énoncé, et c'est forcément la seule.

Ont fourni une solution correcte : B. Daudin Clavaud (Tle au Lycée Henri-IV, à Paris), H. Chalandon-Goskrzynski (MPSI à l'Optimal, à Paris), L. Doué (MPSI au Lycée Louis Pasteur, à Neuilly-sur-Seine), M. Bohère (L1 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), S. Gvozdić (L1 maths-info à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), O. Sabatin (LDD2 math-phys à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), N. Déhais (L3 maths + magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), A. Ellouze (3ème année à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, à Paris), B. Goujaud (doctorant à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), R. Khanfir (doctorant à Sorbonne Université, à Paris), J. Muller (doctorant au LAGA -Institut Galilée, à l'Université Sorbonne Paris Nord, à Villetaneuse), D. Collignon (attaché statisticien hors classe au département informatique et télécommunications pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon), C. Lemonnier (professeure au Collège Yves Montand, à Val-au-Perche), l'équipe formée par D. Arbulu Sedano (L3 info à Sorbonne Université, à Paris), M. Baccara (1ère année à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, à Paris) et S. Baumert (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris), l'équipe formée par S. Bakayoko (3ème année ingénieur à l'Ecole Royale Militaire, à Bruxelles) et N. E. Polneau (1ère année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), l'équipe formée par P. Boisseau (M2 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et M. Vermeil (M2 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), l'équipe formée par E. Bonnafoux (doctorant au CMLS, à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), A. Gautier (doctorante à l'Université de Berne, à Berne) et A.-B. Ulusoy (doctorant au LIX, à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau).

Solution du problème 12 : Montrons qu'il n'existe pas de tels entiers strictement positifs A et B. Supposons par contradiction que seuls les nombres premiers $p_1, \ldots, p_N$ divisent au moins l'un des entiers $u_n = A \times 2021^n + B \times 2022^n$ avec $n \geq 1$. Alors pour tout $n \geq 1$, u_n peut s'écrire $u_n = p_1^{\alpha_{1,n}} \ldots p_N^{\alpha_{N,n}}$. Soit $i_n \in \{1, \ldots, N\}$ tel que $p_{i_n}^{\alpha_{i_n,n}} \geq p_k^{\alpha_{k,n}}$ pour tout $k = 1, \ldots, N$. En particulier, $(p_{i_n}^{\alpha_{i_n,n}})^N \geq u_n$.
Comme il n'y a que N valeurs possibles pour i_n, parmi les $N+1$ entiers $n, \ldots, n+N$ on peut en trouver deux, disons $a < b$, tels que $i_a = i_b$. Soit β le plus petit entier parmi $\alpha_{i_a,a}$ et $\alpha_{i_b,b}$, de sorte que $p_{i_a}^{\beta}$ divise à la fois u_a et u_b. Donc $p_{i_a}^{\beta}$ divise aussi $u_b - 2021^{b-a} u_a = B \times 2022^a (2022^{b-a} - 2021^{b-a})$ et $u_b - 2022^{b-a} u_a = A \times 2021^a (2021^{b-a} - 2022^{b-a})$. Remarquons

que si une puissance q^c d'un nombre premier divise à la fois $B \times 2022^a$ et $A \times 2021^a$, alors q^c divisera aussi A et B, puisque 2021 et 2022 sont premiers entre eux. Donc q^c est borné par un entier C qui ne dépend que de A et de B, mais pas de a. Les deux dernières propriétés de $p_{i_a}^{\beta}$ impliquent donc que $p_{i_a}^{\beta} \leq C(2022^{b-a} - 2021^{b-a}) \leq C(2022^N - 2021^N)$. D'autre part, on a vu que par définition de i_n, on a $(p_{i_a}^{\beta})^N \geq u_a \geq u_n$. Mais alors $u_n \leq C^N(2022^N - 2021^N)^N$ pour tout $n \geq 1$, ce qui contredit le fait que la suite u_n est non bornée.

Ont fourni une solution correcte : S. Gvozdić (L1 maths-info à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), O. Sabatin (LDD2 math-phys à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), B. Goujaud (doctorant à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), R. Khanfir (doctorant à Sorbonne Université, à Paris), J. Muller (doctorant au LAGA -Institut Galilée, à l'Université Sorbonne Paris Nord, à Villetaneuse), D. Collignon (attaché statisticien hors classe au département informatique et télécommunications pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon), l'équipe formée par D. Arbulu Sedano (L3 info à Sorbonne Université, à Paris), M. Baccara (1ère année à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, à Paris) et S. Baumert (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris), l'équipe formée par S. Bakayoko (3ème année ingénieur à l'Ecole Royale Militaire, à Bruxelles) et N. E. Polneau (1ère année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), l'équipe formée par P. Boisseau (M2 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et M. Vermeil (M2 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), l'équipe formée par E. Bonnafoux (doctorant au CMLS, à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), A. Gautier (doctorante à l'Université de Berne, à Berne) et A.-B. Ulusoy (doctorant au LIX, à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau).