Marathon d'Orsay de Mathématiques

Janvier 2023

Voici les énoncés des problèmes suivants, dont les solutions sont attendues au plus tard le **lundi 20 février 2023 à 14h** par email à `marathon.math@universite-paris-saclay.fr`, par la poste (voir l'adresse sur https ://www.imo.universite-paris-saclay.fr/marathon), ou déposées dans une boîte en carton prévue à cet effet au rez-de-chaussée du bâtiment 307, dans la salle des casiers à courrier située à droite du grand hall, juste après avoir franchi l'entrée principale.

Nous vous rappelons que pour que vos solutions puissent être considérées comme correctes, il est indispensable que vous justifiez très soigneusement vos réponses, comme dans une démonstration. Si vous répondez à plusieurs problèmes, il vous est demandé de le faire sur des feuilles séparées. Merci d'indiquer clairement votre nom, prénom, année d'études (ou statut), établissement, ville de cet établissement et adresse email.

Problème 9 (semi et complet)

Dans une fête municipale sont organisées diverses épreuves d'adresse. Après chaque épreuve, le joueur reçoit une petite carte sur laquelle est indiqué un nombre entier de points entre 3 et 10. A la fin de la journée, Julien a reçu plus de 15 telles cartes, qu'il peut alors échanger dans divers stands contre des cadeaux. L'un de ces stands propose des tablettes de chocolat contre un certain nombre entier de points par tablette. Mais si le nombre total de points sur les cartes échangées n'est pas un multiple du coût d'une tablette, les points en trop sont perdus. Julien échange certaines de ses cartes contre du chocolat, mais ne peut pas éviter de gaspiller des points, quelles que soient les cartes qu'il choisit d'échanger. De retour chez lui, il raconte tout cela à sa soeur Lucie, en précisant qu'il avait gagné juste une carte de moins que le nombre de points requis pour l'achat d'une tablette de chocolat. Lucie en déduit que sur toutes les cartes gagnées par Julien était inscrit le même nombre de points. Quel est son raisonnement ?

Problème 10 (semi et complet)

Quelles sont toutes les solutions (a, b, c, d) du système d'équations

$$\begin{cases} a + \dfrac{2023}{a} & = & 2b, \\ b + \dfrac{2023}{b} & = & 2c, \\ c + \dfrac{2023}{c} & = & 2d, \\ d + \dfrac{2023}{d} & = & 2a, \end{cases}$$

où a, b, c et d sont des nombres réels non nuls ?

Problème 11 (complet)

Valentin possède un très grand stock de carrelages rectangulaires de deux dimensions : 30×32 et 29×31 (toutes les mesures sont en centimètres). Ses collègues, qui utilisent des carrelages de tailles plus standard, se moquent souvent de lui ; Valentin se défend en affirmant que sa manière de travailler est meilleure. Plus précisément, il prétend que si une salle rectangulaire a des dimensions qui sont toutes deux des nombres entiers suffisamment grands en centimètres, alors il pourra toujours la carreler entièrement, en n'utilisant que des carrelages de son stock et sans en couper aucun. Valentin a-t-il raison ?

Problème 12 (complet)

Philatéliste à la fois maniaque et original, Hercule collectionne exclusivement les timbres de forme carrée (mais de tailles variables). Il a calculé que la somme des aires de tous les timbres de sa collection est exactement égale à 50 centimètres carrés. Hercule possède un cadre carré de 10 centimètres de côté pour y exposer sa collection. Avec ces seules informations, est-il certain qu'Hercule pourra disposer tous ses timbres dans le cadre sans que deux timbres quelconques ne se recouvrent, même partiellement ?