Marathon d'Orsay de Mathématiques

Janvier 2024

Voici les énoncés des problèmes suivants, dont les solutions sont attendues au plus tard le **lundi 12 février 2024 à 14h** par email à `marathon.math@universite-paris-saclay.fr`, par la poste (voir l'adresse sur https ://www.imo.universite-paris-saclay.fr/marathon), ou déposées dans une boîte en carton prévue à cet effet au rez-de-chaussée du bâtiment 307, dans la salle des casiers à courrier située à droite du grand hall, juste après avoir franchi l'entrée principale.

Nous vous rappelons que pour que vos solutions puissent être considérées comme correctes, il est indispensable que vous justifiez très soigneusement vos réponses, comme dans une démonstration. Si vous répondez à plusieurs problèmes, il vous est demandé de le faire sur des feuilles séparées. Merci d'indiquer clairement votre nom, prénom, année d'études (ou statut), établissement, ville de cet établissement et adresse email.

Problème 9 (semi et complet)

Beth place 2024 dames sur un échiquier 2024×2024 de sorte qu'aucune dame ne puisse prendre une autre dame (en d'autres termes, deux dames ne sont jamais sur la même ligne, sur la même colonne, ou sur une même diagonale). Sera-t-il alors toujours possible pour Beth de trouver deux dames situées sur des cases à distance 2024 l'une de l'autre ?
La distance entre deux cases C_1 et C_2 désigne ici le nombre minimal de déplacements entre cases voisines (ayant un côté en commun) qu'il faut effectuer pour se rendre de C_1 à C_2.

Problème 10 (semi et complet)

Un nombre $r > 0$ est rationnel si il existe deux entiers $p, q > 0$ premiers entre eux tels que $r = \frac{p}{q}$. Quels sont tous les nombres rationnels $r > 0$ distincts de 1 ayant la propriété que le nombre $r^{\frac{1}{r-1}}$ est également rationnel ?

Problème 11 (complet)

On dira qu'un ensemble $\{x, y, z\}$ de 3 entiers $x, y, z \geq 0$ avec $x < y < z$ est franco-belge si $\{z - y, y - x\} = \{1789, 1830\}$. Est-il vrai que l'ensemble des entiers ≥ 0 est la réunion d'ensembles franco-belges disjoints ?

Problème 12 (complet)

Effie s'est donné 3 points A, B et C non alignés dans le plan et ne formant pas un triangle équilatéral. Elle choisit ensuite 3 droites d_A, d_B et d_C telles que $A \in d_A$, $B \in d_B$ et $C \in d_C$ de sorte que ces droites délimitent un triangle équilatéral. Elle colorie alors en rouge le centre du cercle circonscrit à ce triangle. Effie répète cette opération pour d'autres tels choix de droites d_A, d_B et d_C. Montrer que tous les points coloriés en rouge par Effie se trouvent sur la réunion de deux cercles concentriques et distincts du plan.