

MARATHON D'ORSAY DE MATHÉMATIQUES

Janvier 2025

Voici les énoncés des problèmes suivants, dont les solutions sont attendues au plus tard le **mardi 18 février 2025 à 23h59** par email à marathon.orsay.math@gmail.com.

Nous vous rappelons que pour que vos solutions puissent être considérées comme correctes, il est indispensable que vous justifiez très soigneusement vos réponses, comme dans une démonstration. Si vous répondez à plusieurs problèmes, il vous est demandé de le faire sur des feuilles séparées. Merci d'indiquer clairement votre nom, prénom, année d'études (ou statut), établissement, ville de cet établissement et adresse email.

Problème 5 (semi et complet)

Sophie et Gloria s'amuse avec des jeux mathématiques de leur invention. Sophie choisit secrètement un mot de longueur ℓ formé par les lettres A et B. Elle choisit aussi un entier d entre 1 et $\ell - 1$ qu'elle révèle à Gloria. Sophie écrit ensuite au tableau la liste de tous les mots de longueur ℓ qui diffèrent du mot choisi en exactement d emplacements. Par exemple, si Sophie choisit le mot AABA de longueur $\ell = 4$ ainsi que l'entier $d = 1$, elle écrira BABA, ABBA, AAAA et AABB. En s'aidant de la valeur de d et de cette liste, Gloria doit alors deviner le mot choisi par Sophie. Quelle est, en fonction de ℓ et de d , la probabilité que Gloria devine correctement à sa première tentative ?

Problème 6 (semi et complet)

Pour la suite de leurs jeux mathématiques, Sophie choisit maintenant un mot M_1 constitué de k lettres A, k lettres B et k lettres C, dans l'ordre de son choix. Elle pourra par la suite modifier ce mot en échangeant deux lettres consécutives de son choix, puis en répétant une telle opération autant de fois que souhaité. Gloria quant à elle doit choisir un autre mot M_2 , lui aussi constitué de k lettres A, k lettres B et k lettres C, de manière à maximiser le nombre d'échanges successifs que Sophie devra effectuer pour transformer M_1 en M_2 . Montrez que quel que soit le mot M_1 choisi par Sophie, Gloria pourra toujours choisir un mot M_2 de sorte que ce nombre d'échanges sera supérieur ou égal à $3k^2/2$.

Problème 7 (complet)

Olivier a fabriqué une boîte en forme de tétraèdre à l'intérieur de laquelle il peut ranger son ballon de football. Fier de son bricolage, il va expliquer à sa grande soeur Isabelle que son ballon d'un rayon de 11 centimètres rentre entièrement dans sa boîte, que chaque arête de sa boîte mesure un nombre entier de centimètres, et que d'ailleurs l'une de ces arêtes, appelons-la A , mesure 40 centimètres. Sans avoir vu la boîte, mais après quelques instants de réflexion, Isabelle lui répond en souriant que la seule arête de sa boîte sans sommet commun avec l'arête A doit avoir une longueur d'au moins 49 centimètres. Olivier n'en revient pas : expliquez-lui comment il est possible d'atteindre cette conclusion au moyen de ces seules informations et sans l'aide d'un ordinateur.

Problème 8 (complet)

Maël a fabriqué un panneau carré d'aire 2025 centimètres carrés, sur lequel 1000 points ont été coloriés en rouge. Il dispose également d'un pochoir ayant la forme d'un carré de 4 centimètres de côté, percé en son centre d'un trou circulaire de 2 centimètres de diamètre. Maël cherche à placer son pochoir sur le panneau (une partie du pochoir pouvant éventuellement dépasser du panneau) de manière à recouvrir le plus grand nombre possible de points rouges. Aidez-le en montrant qu'il lui sera toujours possible de recouvrir au moins 6 points rouges, quelle que soit la disposition des points rouges sur le panneau.