Marathon d'Orsay de Mathématiques

Mai 2017

Voici les solutions des derniers problèmes, avec les noms de ceux qui ont fourni une solution correcte.

Solution du problème 10 : Lorsque $n = 2$, les entiers $c_1 = 1, c_2 = 8, c_3 = 4$ et $c_4 = 7$ conviennent, puisque $1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2 = 65$. Pour $n = 3$, les entiers $c_1 = 5, c_2 = 6, c_3 = 8, c_4 = 3, c_5 = 4, c_6 = 10$ conviennent, puisque $5^2 + 6^2 + 8^2 = 3^2 + 4^2 + 10^2 = 125$. Pour n plus grand on procède par récurrence. Si $c_1^2 + \ldots + c_n^2 = c_{n+1}^2 + \ldots + c_{2n}^2$, alors $1^2 + 8^2 + (10c_1)^2 + \ldots + (10c_n)^2 = 4^2 + 7^2 + (10c_{n+1})^2 + \ldots + (10c_{2n})^2$, et les $2n+2$ entiers dans cette expression sont bien deux à deux distincts. Jacques a donc raison.

Ont fourni une solution correcte : A. Napame (L3 MFA + magistère), C. Lemonnier (M2 agrégation), B. Duvocelle (M2 optimisation), B. Ghamit (M2 AAG) et I. Konan (M2 optimisation).

Solution du problème 11 : Si l'un des plans cherchés H contient les 6 points, alors c'est le seul qui en contienne au moins 4 et on n'a qu'un seul plan H.
Si l'un des plans cherchés H contient 5 des 6 points, alors tout autre plan cherché ne peut contenir que 3 points alignés de H (plus le 6e point), sinon il coïnciderait avec H. Le nombre de droites dans H contenant 3 des 5 points est au plus 2, car chaque droite doit contenir 3 points dont au plus 1 en commun avec les autres droites. Ceci donne 2 autres plans, donc 3 plans en tout.
Enfin, si tout plan contient exactement 4 points, notons H l'un d'entre eux, A, B, C, D les points qu'il contient et P, Q les points qu'il ne contient pas. Si A, B, C, D ne contient aucun triplet colinéaire, tout autre plan que H ne peut contenir que 2 tels points et donc doit contenir aussi P et Q, ainsi que le point R d'intersection de la droite PQ et du plan H. Le nombre de droites dans H contenant 2 des points A, B, C, D et passant par R est au plus 3, lorsque R est l'un des points A, B, C, D. On obtient ainsi 3 autres plans, donc 4 en tout.
Si A, B, C, D contient (exactement) un triplet colinéaire, on peut les renommer pour que ce soient A, B, C avec B entre A et C. Les plans contenant ce triplet sont $H = ABCD$, $ABCP$ et $ABCQ$. Les autres ne peuvent contenir que 2 points dans H, donc forcément P et Q, ainsi que le point R d'intersection de la droite PQ et du plan H. Le nombre de droites dans H contenant 2 des points A, B, C, D et passant par R est au plus 3, lorsque $R = D$. On obtient ainsi $3 + 3 = 6$ plans. Une telle configuration est réalisée par un tétraèdre $ACPQ$ portant le point B sur l'arête AC et le point D sur l'arête PQ. Le nombre maximal de tels plans est donc 6.

Ont fourni une solution correcte : C. Lemonnier (M2 agrégation), B. Duvocelle (M2 optimisation) et I. Konan (M2 optimisation).

Solution du problème 12 : Notons N le nombre de marches de l'escalier. Entre deux rencontres successives de Rey et de son double bondissant, le nombre de marches à parcourir est divisé par 2, car Rey parcourt la moitié des marches restantes tandis que son double bondissant parcourt 3 telles moitiés (deux à l'aller et une au retour). Après 5 rencontres, il reste $N/2^5$ marches à gravir. De même, entre deux rencontres successives de Rey et de son double trottinant, le nombre de marches à parcourir est divisé par 3, car Rey parcourt 2 tiers des marches restantes tandis que son double trottinant parcourt 4 tels tiers (trois à l'aller et un au retour). Après 5 rencontres, il reste $N/3^5$ marches à gravir. Comme $N/2^5 - N/3^5 = 211$, on trouve $N = 7776$ marches.

Ont fourni une solution correcte : C. Lemonnier (M2 agrégation), B. Duvocelle (M2 optimisation), B. Ghamit (M2 AAG) et I. Konan (M2 optimisation).

Voici le palmarès final du Marathon d'Orsay de Mathématiques.

<u>A résolu 12 problèmes :</u> I. Konan (M2 optimisation).

<u>Ont résolu 8 problèmes :</u> C. Lemonnier (M2 agrégation) et B. Ghamit (M2 AAG).

<u>A résolu 7 problèmes :</u> B. Duvocelle (M2 optimisation).

<u>Ont résolu 5 problèmes :</u> Z. Chen (M2 AAG) et M. Andrieu & L. Vivion (M2 math discr à Marseille & M2 math fonda à Nice).

<u>Ont résolu 3 problèmes :</u> N. Déhais (2nde, Lycée Blaise Pascal), A. Napame (L3 MFA + magistère) et P. Frixons (M1 Hadamard).

<u>Ont résolu 2 problèmes :</u> L. Hahn (L1 MPI), T. Berthod (L3 MFA + magistère), A. Goyer (L3 MFA + magistère), T. Paolantoni (doctorant) et O. Stietel (enseign math/info en Inde).

<u>Ont résolu 1 problème :</u> D. Lesnoff (L2 math), A. Astruc (L3 MFA + magistère), L. Ertzbischoff (L3 + magistère), C. Valence (L3 MFA + magistère), F. Gagelin (M2 agrégation) et D. Kadnikov (M2 optimisation).

Tous les participants listés ci-dessus sont cordialement invités à un drink et à la cérémonie de remise des diplômes et des prix, qui auront lieu le **mardi 23 mai** à 18h dans la salle de thé du bâtiment 425 (en quittant la cage d'escalier principale au premier étage, faire un demi-tour sur la gauche puis continuer tout droit). Tous les participants ayant résolu correctement au moins un problème recevront un diplôme et ceux qui ont résolu correctement au moins la moitié des problèmes recevront un petit prix.