

## MARATHON D'ORSAY DE MATHÉMATIQUES

Mars 2018

Voici les énoncés des problèmes suivants, dont les solutions sont attendues au plus tard le **lundi 2 avril 2018 à 14h**, par la poste (voir l'adresse sur <http://www.math.u-psud.fr/marathon>), par email à [marathon.orsay@math.u-psud.fr](mailto:marathon.orsay@math.u-psud.fr) ou déposées dans une boîte en carton prévue à cet effet au rez-de-chaussée du bâtiment 307, dans la salle des casiers à courrier située à droite du grand hall, juste après avoir franchi l'entrée principale.

Nous vous rappelons que pour que vos solutions puissent être considérées comme correctes, il est indispensable que vous justifiez très soigneusement vos réponses, comme dans une démonstration. Si vous répondez à plusieurs problèmes, il vous est demandé de le faire sur des feuilles séparées. Merci d'indiquer clairement votre nom, prénom, année d'études (ou statut), établissement, ville et adresse email.

### Problème 9 (semi et complet)

Les 35 élèves d'une classe de lycée ont choisi chacun un nombre entier. Leur professeur de mathématiques, qui ne connaît pas ces entiers, peut demander à tout groupe de 3 élèves de son choix de lui révéler la somme de leurs 3 entiers. Combien de telles questions au minimum devra poser le professeur pour déterminer si la somme des 35 entiers choisis par l'ensemble des élèves de la classe est paire ou impaire ?

### Problème 10 (semi et complet)

Le cercle  $\mathcal{C}_1$  inscrit d'un triangle  $ABC$  est tangent à  $AB$  au point  $D$  et à  $AC$  au point  $E$ . Soit  $\mathcal{C}_2$  le cercle inscrit au triangle  $ADE$ . Démontrer que le centre du cercle  $\mathcal{C}_2$  est sur le cercle  $\mathcal{C}_1$ .

### Problème 11 (complet)

Camille veut s'amuser à noircir certaines cases d'une grille  $9 \times 9$ , composée de cases carrées blanches, au moyen d'un crayon à papier. Quel nombre  $n$  maximal de cases peut-on l'autoriser à noircir de sorte que, quelles que soient les  $n$  cases que Camille choisira de noircir, il restera au moins un rectangle  $1 \times 4$  ou  $4 \times 1$  de cases blanches quelque part dans la grille ?

### Problème 12 (complet)

Que vaut la limite de la somme  $\sum_{n=1}^k \frac{1}{4(n^2 + n - 1) + 1}$  lorsque  $k$  tend vers l'infini ?