Marathon d'Orsay de Mathématiques

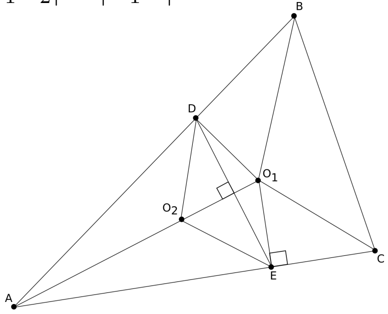
Résultats de la troisième vague de mars 2018

Voici les solutions des problèmes précédents, avec les noms des participants qui ont fourni une solution correcte.

Solution du problème 9 : Le professeur devant bien entendu interroger chaque élève au moins une fois, il doit poser plus de $35/3$ questions, donc au moins 12 questions. Avec 12 questions, si chaque élève est interrogé, alors un seul élève A est interrogé 2 fois, une fois avec B et C, puis une fois avec D et E. Si on change la parité des nombres de A, B et D, cela ne change pas la parité des réponses au professeur, mais bien la parité de la somme des nombres de tous les élèves, de sorte que 12 questions ne peuvent suffire. Avec 13 questions, le professeur peut interroger 33 élèves exactement une fois avec 11 questions, ne laissant que les élèves Y et Z non interrogés. Si U et V sont deux élèves choisis parmi les 33 interrogés, il questionne Y, U et V, puis Z, U et V. La somme de ces deux réponses a la même parité que la somme des nombres de Y et Z. La somme des parités des 13 réponses est donc la parité recherchée, de sorte que 13 questions suffisent.

Ont fourni une solution correcte : N. Déhais (1ère S au Lycée Blaise Pascal, Orsay), T. Laurenceau-Frugier (1ère S au Lycée François-Joseph Talma, Brunoy), M. Coué (Tle S au Lycée Descartes, Antony), B. Gonin (Tle S au Lycée Descartes, Antony), E. Vafiades (Tle S au Lycée Frédéric Mistral, Fresnes), D. Girault (L3 MFA + magist. à UPSud, Orsay), A. Napame (M1 MF + magist. à UPsud, Orsay), D. Albertin (M2 FES à UPSud, Orsay), C. Falcon (M2 AAG à UPSud, Orsay), M. Farid (M2 Stat Finance à l'ENSAE, Palaiseau), D. Kadnikov (doctorant à l'Ecole des ponts et chaussées, Marne-la-Vallée), C. Moulin (doctorante à UPSud, LRI et INRA, Gif-sur-Yvette et Orsay), C. Lemonnier (prof. agrégée au Lycée Jean-François Millet, Cherbourg-en-Cotentin).

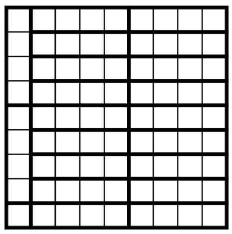
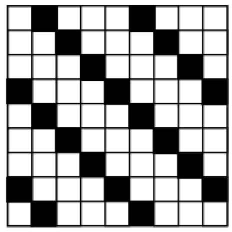
Solution du problème 10 : Soit O_1 le centre de $\mathcal{C}_1$ et O_2 le centre de $\mathcal{C}_2$. Pour montrer que $O_2 \in \mathcal{C}_1$, il suffit de montrer que $|O_1O_2| = |O_1E|$. L'angle $\widehat{O_1O_2E}$ est le supplémentaire de l'angle $\widehat{AO_2E}$, qui est lui-même le supplémentaire de la somme des angles $\widehat{O_2AE}$ et $\widehat{AEO_2}$. D'autre part, l'angle $\widehat{O_2EO_1}$ est la somme des angles $\widehat{O_2ED}$ et $\widehat{DEO_1}$. L'angle $\widehat{O_2ED}$ est la moitié de l'angle $\widehat{AED}$, puisque O_2 est l'intersection des bissectrices du triangle ADE. L'angle $\widehat{DEO_1}$ est égal à l'angle $\widehat{O_1AE} = \widehat{O_2AE}$ puisque $DE \perp O_1A$ (O_1A étant la bissectrice de $\widehat{DAE}$) et $O_1E \perp AE$. Par conséquent, les angles $\widehat{O_1O_2E}$ et $\widehat{O_2EO_1}$ sont égaux, ce qui implique que $|O_1O_2| = |O_1E|$ comme souhaité.



Ont fourni une solution correcte : T. Laurenceau-Frugier (1ère S au Lycée François-Joseph Talma, Brunoy), E. Vafiades (Tle S au Lycée Frédéric Mistral, Fresnes), D. Girault (L3 MFA + magist. à UPSud, Orsay), D. Albertin (M2 FES à UPSud, Orsay), M. Farid

(M2 Stat Finance à l'ENSAE, Palaiseau), B. Duvocelle (doctorant à la School of Business and Economics, Maastricht University), D. Kadnikov (doctorant à l'Ecole des ponts et chaussées, Marne-la-Vallée), C. Lemonnier (prof. agrégée au Lycée Jean-François Millet, Cherbourg-en-Cotentin).

Solution du problème 11 : On peut découper la grille 9×9 (cfr dessin de gauche) en en un rectangle 9×1 (décomposable en 2 rectangles 4×1 et une case isolée) et un rectangle 9×8 (lui-même composé de 18 rectangles 1×4 disjoints). On peut donc placer 20 rectangles 1×4 ou 4×1 disjoints dans la grille. Si Camille noircit au plus 19 cases, l'un de ces rectangles au moins restera blanc. D'autre part, si Camille noircit les 20 cases comme ci-dessous (cfr dessin de droite), il ne reste aucun rectangle 1×4 ou 4×1 tout blanc. Donc on peut autoriser Camille à noircir 19 cases au maximum.

Ont fourni une solution correcte : D. Girault (L3 MFA + magist. à UPSud, Orsay), A. Napame (M1 MF + magist. à UPsud, Orsay), D. Albertin (M2 FES à UPSud, Orsay), C. Falcon (M2 AAG à UPSud, Orsay), M. Farid (M2 Stat Finance à l'ENSAE, Palaiseau), B. Duvocelle (doctorant à la School of Business and Economics, Maastricht University), D. Kadnikov (doctorant à l'Ecole des ponts et chaussées, Marne-la-Vallée), C. Moulin (doctorante à UPSud, LRI et INRA, Gif-sur-Yvette et Orsay), C. Lemonnier (prof. agrégée au Lycée Jean-François Millet, Cherbourg-en-Cotentin).

Solution du problème 12 : On calcule $4(n^2+n-1)+1 = 4n^2+4n-3 = (2n-1)(2n+3)$ et $\frac{1}{(2n-1)(2n+3)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+3}\right)$. La somme de l'énoncé est donc égale au quart de

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2n-1} - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2n+3} = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2n-1} - \sum_{m=3}^{k+2} \frac{1}{2m-1},$$

où on a posé $m = n+2$. Dans la dernière expression, seuls les termes pour $n = 1$ et 2 ainsi que $m = k+1$ et $k+2$ ne se simplifient pas. Les 2 derniers tendent vers 0 lorsque k tend vers l'infini. A la limite, on obtient donc $\frac{1}{4}(1+\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$.

Ont fourni une solution correcte : A. Bonnet (1ère S au Lycée Michelet, Vanves), B. Nguyen (Tle S au Lycée Lakanal, Sceaux), D. Girault (L3 MFA + magist. à UPSud, Orsay), A. Napame (M1 MF + magist. à UPsud, Orsay), D. Albertin (M2 FES à UPSud, Orsay), C. Falcon (M2 AAG à UPSud, Orsay), M. Farid (M2 Stat Finance à l'ENSAE, Palaiseau), B. Duvocelle (doctorant à la School of Business and Economics, Maastricht University), D. Kadnikov (doctorant à l'Ecole des ponts et chaussées, Marne-la-Vallée).