Marathon d'Orsay de Mathématiques

Mars 2019

Voici les énoncés des derniers problèmes de la saison 2018-2019, dont les solutions sont attendues au plus tard le **lundi 15 avril 2019 à 14h**, par la poste (voir l'adresse sur http ://www.math.u-psud.fr/marathon), par email à `marathon.orsay@math.u-psud.fr` ou déposées dans une boîte en carton prévue à cet effet au rez-de-chaussée du bâtiment 307, dans la salle des casiers à courrier située à droite du grand hall, juste après avoir franchi l'entrée principale.

Nous vous rappelons que pour que vos solutions puissent être considérées comme correctes, il est indispensable que vous justifiez très soigneusement vos réponses, comme dans une démonstration. Si vous répondez à plusieurs problèmes, il vous est demandé de le faire sur des feuilles séparées. Merci d'indiquer clairement votre nom, prénom, année d'études (ou statut), établissement, ville et adresse email.

Problème 13 (semi et complet)

Les organisateurs du Marathon de la Vallée de Chevreuse ont préparé 40 dossards, numérotés de 1 à 40, pour les participants inscrits. Mais l'un d'entre eux est malade le jour de la course. Les organisateurs attachent un dossard dans le dos de chacun des 39 participants présents, en les choisissant au hasard dans la pile mélangée des 40 dossards. Aucun participant n'a pu voir son propre numéro de dossard ; en revanche, en circulant au sein du groupe avant le départ, chaque participant a pu voir le numéro de tous les autres. Par jeu, chaque participant annonce à haute voix le plus petit numéro ainsi que le plus grand numéro parmi ceux qu'il a vus.
Quelle est la probabilité que cette information suffise à chacun pour déterminer à coup sûr son propre numéro ?

Problème 14 (semi et complet)

On place 15 pions sur un petit damier 4×4 de sorte que chaque case soit occupée par au plus un pion, ce qui laisse exactement une case vide. Lorsque deux pions occupent deux cases voisines (ayant un côté en commun), l'un des pions peut sauter au-dessus de l'autre pour aller occuper la case voisine opposée, si celle-ci était vide. Le pion par-dessus lequel on a sauté est alors retiré du damier.
Pour quelles positions initiales de la case vide est-il possible d'enchaîner de tels mouvements pour se retrouver avec un seul pion sur le damier ?

Problème 15 (complet)

On note $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots$ la suite des nombres premiers en ordre croissant. Existe-t-il un entier $n > 0$ tel que l'on ne puisse pas trouver de carré parfait strictement compris entre $\sum_{i=1}^{n} p_i$ et $\sum_{i=1}^{n+1} p_i$?

Problème 16 (complet)

On considère un prisme ayant pour base un polygone régulier à n côtés. Une diagonale du prisme est une droite joignant deux sommets du prisme n'appartenant pas à une même face de celui-ci. Si 3 diagonales distinctes du prisme s'intersectent en un point O situé strictement à l'intérieur du prisme, démontrer que O est le centre de gravité du prisme.