Marathon d'Orsay de Mathématiques

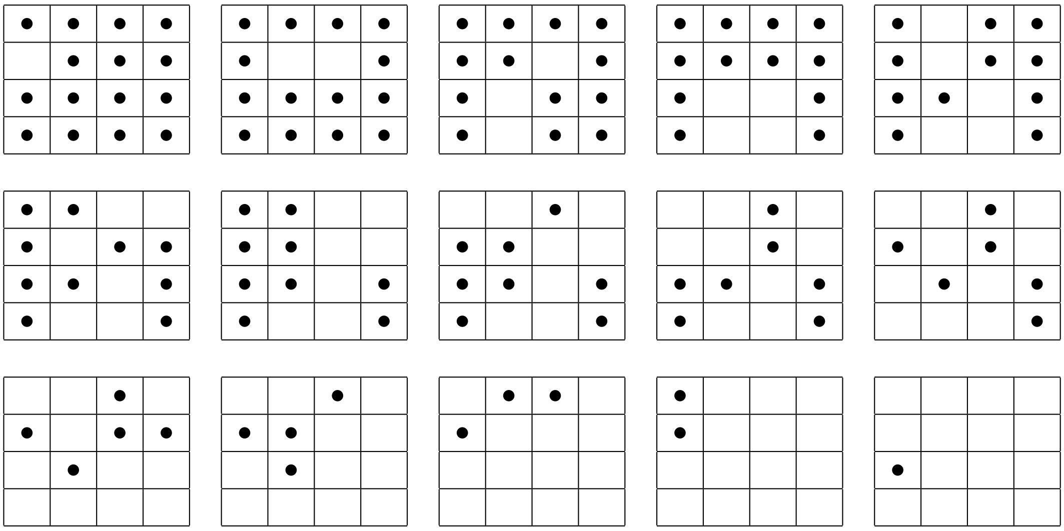
Résultats de la quatrième vague de mars 2019

Voici les solutions de la quatrième vague de problèmes, avec les noms des participants qui ont fourni une solution correcte.

Solution du problème 13 : Si le dossard 1 est inutilisé, il ne sera nommé par personne comme le plus petit vu, ce qui permet à chaque participant de conclure qu'il est inutilisé. Chaque participant voyant 38 autres dossards au dos des autres participants, il ne reste plus qu'une possibilité pour son propre dossard.
Si le dossard 2 est inutilisé, le numéro 1 sera nommé par tous les participants sauf un comme le plus petit vu. Le dernier participant (celui qui porte le 1) annoncera 3 comme le minimum, ce qui permet à chaque participant de conclure que 2 est inutilisé. Donc comme ci-dessus, il ne reste qu'un possibilité pour le dossard de chacun. La situation est symétrique dans le cas du dossard 40 ou 39 manquant.
Enfin, si le dossard manquant est n, entre 3 et 38, le participant portant le dossard $m \neq 1, 2, 39, 40, n$ verra et entendra les mêmes informations que si le dossard m est manquant et que si il porte dossard n. Il ne peut donc pas déterminer son numéro de dossard.
Chacun pourra déterminer son numéro de dossard si et seulement si le dossard manquant est 1, 2, 39 ou 40, ce qui correspond à une probabilité $\frac{4}{40} = \frac{1}{10}$.

Ont fourni une solution correcte : A. Corbineau (1ère S au Lycée Saint Charles, Athis-Mons), C.-M. Stucki (1ère S au Lycée Notre Dame du Grandchamp, Versailles), M. Baccara (Tle S au Lycée Saint-Louis Saint-Clément, Viry-Chatillon), E. Bourroux (Tle S au Lycée Saint-Louis Saint-Clément, Viry-Chatillon), J. de Sainte Marie (Tle S au Lycée Blaise Pascal, Orsay), N. Déhais (Tle S au Lycée Blaise Pascal, Orsay), S. Demir (Tle S au Lycée Saint-Louis Saint-Clément, Viry-Chatillon), S. Kerbourc'h (Tle S au Lycée Michelet, Vanves), T. Vargenau (Tle S au Lycée René Cassin, Arpajon), D. Girault (M1 MF + magist. à l'Université Paris-Sud, Orsay), D. Albertin (M2 maths-info à l'Université Paris-Est, Marne-la-Vallée), Q. Manière (M2 LMFI à l'Université Paris-Diderot, Paris), C. Moulin (doctorante à l'Université Paris-Sud, Orsay), D.-L. Vu (doctorant à l'Institut de Physique Théorique du CEA, Gif-sur-Yvette).

Solution du problème 14 : Si on colorie les cases du damier avec 3 couleurs, en les utilisant dans le même ordre lorsque l'on parcourt le damier ligne par ligne de gauche à droite et de haut en bas, chaque saut d'un pion au-dessus d'un autre implique 3 cases de couleurs différentes. Le nombre de pions sur des cases d'une couleur donnée change donc de ± 1, en particulier de parité, quelle que soit la couleur. Si il ne reste qu'un pion à la fin, ces parités doivent comprendre deux pairs et un impair. En particulier, toutes les parités ne sont pas identiques. Or il y a une 6 cases de la première couleur contre 5 de chacune des autres couleurs, donc la case vide ne peut être de la première couleur. Ceci exclut les 4 coins et 2 des cases du centre. En faisant le même raisonnement après avoir tourné le damier d'un quart de tour, on voit que toutes les cases du centre sont exclues.
Par contre, si la case vide est sur un bord mais pas dans un coin (les 8 cas possibles sont équivalents par symétrie), on peut effectuer des sauts pour ne garder qu'un seul pion en procédant par exemple comme illustré ci-dessous.



Ont fourni une solution correcte : A. Corbineau (1ère S au Lycée Saint Charles, Athis-Mons), J. de Sainte Marie (Tle S au Lycée Blaise Pascal, Orsay), N. Déhais (Tle S au Lycée Blaise Pascal, Orsay), T. Vargenau (Tle S au Lycée René Cassin, Arpajon), D. Girault (M1 MF + magist. à l'Université Paris-Sud, Orsay), Q. Manière (M2 LMFI à l'Université Paris-Diderot, Paris), C. Moulin (doctorante à l'Université Paris-Sud, Orsay), D.-L. Vu (doctorant à l'Institut de Physique Théorique du CEA, Gif-sur-Yvette), C. Lemonnier (Prof agrégée au Lycée Le Verrier, Saint-Lô).

Solution du problème 15 : Pour commencer, montrons par récurrence que $(p_{n+1}-1)^2 > 4S_n$ pour tout $n \geq 4$. Pour $n = 4$, on a bien $(p_5 - 1)^2 = 100 > 4S_4 = 68$. Si $(p_{n+1} - 1)^2 > 4S_n$, alors $(p_{n+2} - 1)^2 \geq (p_{n+1} + 1)^2 = (p_{n+1} - 1)^2 + 4p_{n+1} > 4S_n + 4p_{n+1} = 4S_{n+1}$.
Montrons qu'il existe un entier k tel que $S_n < k^2 < S_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$. Pour $n = 1, 2$ et 3, les entiers $2, 3$ et 4 conviennent. Pour $n \geq 4$, soit ℓ le plus grand entier satisfaisant $\ell^2 \leq S_n$, de sorte que $S_n < (\ell+1)^2$. Montrons que l'on ne peut avoir $S_{n+1} \leq (\ell+1)^2$. En effet, ceci donnerait $p_{n+1} = S_{n+1}-S_n \leq (\ell+1)^2-\ell^2 = 2\ell+1$. Mais alors $(p_{n+1}-1)^2 \leq 4\ell^2 \leq 4S_n$, ce qui contredit la propriété établie précédemment. On a donc bien $S_n < (\ell+1)^2 < S_{n+1}$ comme souhaité.

Ont fourni une solution correcte : A. Corbineau (1ère S au Lycée Saint Charles, Athis-Mons), N. Déhais (Tle S au Lycée Blaise Pascal, Orsay), D. Girault (M1 MF + magist. à l'Université Paris-Sud, Orsay), M. Farid (M2 modélisation aléatoire à l'Université Paris-Diderot, Paris), Q. Manière (M2 LMFI à l'Université Paris-Diderot, Paris), C. Moulin (doctorante à l'Université Paris-Sud, Orsay), D.-L. Vu (doctorant à l'Institut de Physique Théorique du CEA, Gif-sur-Yvette), C. Lemonnier (Prof agrégée au Lycée Le Verrier, Saint-Lô).

Solution du problème 16 : Soient d_1, d_2 et d_3 les diagonales concourantes en O. Notons A, B et C les intersections respectives de ces diagonales avec la première base du prisme et A', B' et C' leurs intersections avec la deuxième base du prisme. Comme les deux bases d'un prisme sont contenues dans des plans parallèles, en intersectant ces plans avec celui défini par les droites sécantes d_1 et d_2, on obtient $AB \mathbin{/\!/} A'B'$. De même, $BC \mathbin{/\!/} B'C'$ et $CA \mathbin{/\!/} C'A'$. Par le théorème de Thalès, le triangle ABC est l'image du triangle $A'B'C'$ par une homothétie de centre O. En particulier, les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables. Mais leurs cercles circonscrits coincident avec les cercles circonscrits des deux bases, qui sont isométriques. Donc les triangles ABC et $A'B'C'$ sont en fait isométriques, et l'homothétie de centre O susmentionnée est une symétrie centrale. Projetons O, A, B et C sur la deuxième base du prisme, parallèlement aux arêtes du prisme non contenues dans ses bases, et notons O'', A'', B'' et C'' leurs images. Alors $A''B''C''$ est l'image de ABC

par la symétrie de centre O''. Les centres de leurs cercles circonscrits sont donc également images par la symétrie de centre O'', mais ces deux points sont tous deux égaux au centre du cercle circonscrit de la base. Donc ce centre est O'', et en raisonnant de même avec l'autre base, on voit que O est le milieu du segment joignant les centres des deux bases, c'est-à-dire le centre de gravité du prisme.

Ont fourni une solution correcte : N. Déhais (Tle S au Lycée Blaise Pascal, Orsay), D. Girault (M1 MF + magist. à l'Université Paris-Sud, Orsay), M. Farid (M2 modélisation aléatoire à l'Université Paris-Diderot, Paris), D.-L. Vu (doctorant à l'Institut de Physique Théorique du CEA, Gif-sur-Yvette).