Marathon d'Orsay de Mathématiques

Mars 2020

Voici les énoncés des derniers problèmes de la saison 2019–2020 du Marathon d'Orsay de Mathématiques, dont les solutions sont attendues au plus tard le **lundi 13 avril 2020 à 14h** par email à `marathon.orsay@math.u-psud.fr`.

Nous vous rappelons que pour que vos solutions puissent être considérées comme correctes, il est indispensable que vous justifiez très soigneusement vos réponses, comme dans une démonstration. Merci d'indiquer clairement votre nom, prénom, année d'études (ou statut), établissement, ville et adresse email.

Problème 13 (semi et complet)

Lara s'amuse à placer sur un échiquier de taille $2^n \times 2^n$ des pièces de bois en forme de L, de sorte que chaque pièce recouvre exactement 3 cases de l'échiquier et ne chevauche jamais une autre pièce. Lara dispose d'une réserve littéralement inépuisable de telles pièces de bois. Sur la case située dans le coin supérieur gauche de l'échiquier, Lara dépose une collation qu'elle s'autorisera à manger si elle parvient à recouvrir toutes les autres cases de l'échiquier avec ses pièces de bois.
Pour quelles valeurs de l'entier $n \geq 1$ Lara aura-t-elle une chance de pouvoir manger sa collation ?

Problème 14 (semi et complet)

Comment calculer (sous la forme d'une fraction irréductible) la somme

$$\sum_{i=1}^{1010} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \ldots + \frac{1}{2019 \times 2021}$$

sans utiliser une calculatrice ou un ordinateur ?

Problème 15 (complet)

Trois amis se promènent dans un parc et arrivent à proximité d'un sentier décrivant un cercle parfait, au centre duquel se trouve une fontaine. Pour s'amuser, ils décident de se placer chacun indépendamment des autres à un endroit choisi au hasard et de manière uniforme sur le sentier circulaire, puis de se faire signe depuis leurs positions respectives.
Quelle est la probabilité que la fontaine soit à l'intérieur du triangle formé par les trois amis ?

Problème 16 (complet)

On considère un nombre fini de bâtonnets de longueurs variables mais finies, tous disposés le long d'une même droite. Les bâtonnets peuvent se recouvrir partiellement, totalement ou pas du tout. Est-il possible de colorier chaque bâtonnet en rouge ou en bleu de sorte qu'en chaque point p de la droite, le nombre de bâtonnets rouges contenant p diffère du nombre de bâtonnets bleus contenant p de 0, 1 ou -1 ?