MATHEMATIQUES ORSAY

Marathon d'Orsay de Mathématiques

Résultats de la quatrième vague de mars 2020

Voici les solutions de la quatrième vague de problèmes, avec les noms des participants qui ont fourni une solution correcte.

Solution du problème 13 : Si Lara joue bien, elle pourra manger sa collation quel que soit l'entier $n \geq 1$. En effet, pour $n = 1$, on a un échiquier 2×2 avec la collation dans un coin, et une seule pièce en L suffit à recouvrir les 3 cases restantes. Supposons maintenant que le recouvrement est possible pour un échiquier $2^n \times 2^n$ et montrons qu'il l'est aussi pour un échiquier $2^{n+1} \times 2^{n+1}$. Découpons cet échiquier par ses médianes en 4 sous-échiquiers $2^n \times 2^n$. Les 4 cases situées au centre de l'échiquier sont chacune un coin de l'un des sous-échiquiers. L'un d'entre eux porte la collation dans un autre de ses coins. Plaçons une pièce en L de manière à recouvrir le coin central des 3 autres sous-échiquiers. Ainsi, il reste à recouvrir 4 sous-échiquiers $2^n \times 2^n$ chacun privé d'un coin. Mais nous avons supposé que chacun de ces 4 recouvrements est possible, donc celui de tout l'échiquier $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ l'est aussi.

Ont fourni une solution correcte : R. et A. Crovisier (5ème au Collège La Fontaine, à Antony et 2nde au Lycée Lakanal, à Sceaux), M. Billon (1ère S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Jiao (1ère à l'Institut Notre-Dame, à Meudon), S. Meziane (1ère SMP au Lycée Franco-Allemand, à Buc), I. Misguich (1ère S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), L. Polderman (1ère au Lycée Saint-Jean Hulst, à Versailles), L. Champignon (Tle S au Lycée Jean Vilar, à Plaisir), A. Corbineau (Tle S au Lycée Saint-Charles, à Athis-Mons), N. Llorens (Tle S au Lycée Turgot, à Paris), C. Rolland (Tle S au Lycée Louis Bascan, à Rambouillet), R. Weidle (Tle S au Lycée Michelet , à Vanves), M. Baccara (MPSI au Lycée Jean-Baptiste Corot, à Savigny-sur-Orge), J. de Sainte Marie (MPSI au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), N. Déhais (MPSI au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), S. Kerbourc'h (MPSI au Lycée Michelet, à Vanves), D. Girault (M2 AAG à l'Université Paris-Sud, à Orsay), C. Falcon (doctorant à l'Université Paris-Sud, à Orsay), C. Lemonnier (Professeure agrégée au Lycée Napoléon, à L'Aigle), P. Vernier (Professeur de maths au Lycée René Cassin, à Arpajon), M. Farid (Consultant chez Awalee Consulting, à Paris), H. Jallouli (Analyste quantitatif à la Deutsche Bank).

Solution du problème 14 : Remarquons que $\frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1})$. Par conséquent, dans la somme de ces expressions pour i allant de 1 à 1010, le deuxième terme pour i se simplifie avec le premier terme pour $i+1$ (dans de telles circonstances, on dit que la somme est télescopique). Après toutes ces simplifications, il ne reste que le premier terme pour $i = 1$, qui vaut $\frac{1}{2}$, et le deuxième terme pour $i = 1010$, qui vaut $-\frac{1}{2} \times \frac{1}{2021}$. Au total, la somme est donc égale à $\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2021}) = \frac{1010}{2021}$.

Ont fourni une solution correcte : M. Billon (1ère S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Fourré (1ère S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Hazera (1ère au Lycée Notre Dame, à Meudon), A. Jiao (1ère à l'Institut Notre-Dame, à Meudon), S. Meziane (1ère SMP au Lycée Franco-Allemand, à Buc), I. Misguich (1ère S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), L. Polderman (1ère au Lycée Saint-Jean Hulst, à Versailles), M. Bennis (Tle S au Lycée Frédéric Mistral, à Fresnes), A. Corbineau (Tle S au Lycée Saint-Charles, à Athis-Mons), N. Llorens (Tle S au Lycée Turgot, à Paris), Y. Loesch (Tle S au Lycée Notre Dame des Missions, à Charenton-Le-Pont), M. A. Nguyen (Tle S au Lycée Lakanal, à Sceaux), M. Baccara (MPSI au Lycée Jean-Baptiste Corot, à Savigny-sur-Orge), J. de Sainte Marie (MPSI au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), N. Déhais (MPSI au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), S. Kerbourc'h (MPSI au Lycée Michelet, à Vanves), C. Falcon (doctorant à l'Université Paris-Sud, à Orsay), C. Lemonnier (Professeure agrégée au Lycée Napoléon, à L'Aigle), P. Vernier (Professeur de maths au Lycée René Cassin, à Arpajon), B. Berached (ingénieur informaticien), M. Farid (Consultant chez Awalee Consulting, à Paris), H. Jallouli (Analyste quantitatif à la Deutsche Bank).

Solution du problème 15 : Si après s'être placés, les trois amis (appelons-les A, B et C) tournent d'un même angle autour de la fontaine (appelons-la O), celle-ci restera dans ou hors du triangle ABC. Nous pouvons donc supposer que A se place en un point donné du cercle. Choisir de manière uniforme la position de B revient à choisir de manière uniforme une droite passant par O, puis de choisir de manière équiprobable l'un des deux points d'intersection de cette droite avec le cercle. Il en va de même pour C. Les droites choisies pour B et C découpent le cercle en 4 arcs. Le triangle ABC contiendra O si et seulement si A est dans le seul arc de cercle qui n'est adjacent ni à B ni à C, et ce quelles que soient les positions des droites choisies pour B et C. Par conséquent, tout dépend du choix des points d'intersection de ces droites avec le cercle, et seul un choix parmi les quatre choix équiprobables possibles donne lieu au résultat souhaité. Sa probabilité est donc $\frac{1}{4}$.

Ont fourni une solution correcte : M. Billon (1ère S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Fourré (1ère S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Jiao (1ère à l'Institut Notre-Dame, à Meudon), S. Meziane (1ère SMP au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Corbineau (Tle S au Lycée Saint-Charles, à Athis-Mons), M. Baccara (MPSI au Lycée Jean-Baptiste Corot, à Savigny-sur-Orge), J. de Sainte Marie (MPSI au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), D. Girault (M2 AAG à l'Université Paris-Sud, à Orsay), C. Falcon (doctorant à l'Université Paris-Sud, à Orsay), C. Lemonnier (Professeure agrégée au Lycée Napoléon, à L'Aigle), P. Vernier (Professeur de maths au Lycée René Cassin, à Arpajon), B. Berached (ingénieur informaticien), H. Jallouli (Analyste quantitatif à la Deutsche Bank).

Solution du problème 16 : Montrons qu'il est toujours possible de colorier les bâtonnets comme demandé, quel que soit le nombre $n \geq 1$. Pour $n = 1$, l'unique bâtonnet peut être colorié de n'importe quelle couleur. Pour $n = 2$, il suffit de colorier les deux bâtonnets de deux couleurs différentes. Supposons maintenant qu'il est possible de faire ce coloriage jusqu'à $n - 1$ bâtonnets, et montrons que l'on peut aussi le faire avec n bâtonnets.
Pour cela, identifions la droite donnée avec la droite des nombres réels, de sorte que chaque bâtonnet peut être décrit par la donnée (a, b) des nombres a et b correspondant à ses extrémités. Considérons l'ordre lexicographique des bâtonnets : on dira que $(a, b) < (c, d)$ si $a < c$ ou si $a = c$ et $b < d$. Remarquons que si deux bâtonnets ont les mêmes extrémités, il suffit de leur donner des couleurs différentes, puis séparément de colorier les $n-2$ autres bâtonnets, ce que l'on a supposé possible. Soit B_1 le bâtonnet minimal pour l'ordre lexicographique. Si B_1 est disjoint des autres bâtonnets, on peut le colorier indépendamment des $n - 1$ autres ce que l'on a supposé possible. Sinon, soit B_2 le bâtonnet minimal parmi les $n - 1$ autres bâtonnets, et on peut donc supposer que B_1 et B_2 s'intersectent. Remplaçons B_1 et B_2 par un bâtonnet B_{12} reliant les extrémités supérieures de B_1 et B_2 (ou par aucun bâtonnet si celles-ci sont au même endroit). On obtient une configuration d'au plus $n - 1$ bâtonnets qui est donc coloriable. On colorie ensuite celui de B_1 ou de B_2 qui avait la même extrémité supérieure que B_{12} de la même couleur que B_{12}, et l'autre

bâtonnet de l'autre couleur (si il n'y a pas de bâtonnet B_{12}, on attribue à B_1 et B_2 des couleurs différentes au hasard). Il ne reste plus qu'à vérifier que ce coloriage convient pour tous les points de la droite ; c'est clairement le cas pour tous les points hors de B_1 et de B_2. Il convient aussi pour tous les points de B_{12} car il n'y a aucune différence entre avoir B_{12} ou avoir B_1 et B_2, et de même pour les points de l'intersection de B_1 et B_2 puisque leurs couleurs différentes se compensent. Enfin, pour les points de B_1 en-dessous de B_2, il n'y a que le bâtonnet B_1, dont la couleur n'importe donc pas.

Ont fourni une solution correcte : A. Fourré (1ère S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), M. Baccara (MPSI au Lycée Jean-Baptiste Corot, à Savigny-sur-Orge), D. Girault (M2 AAG à l'Université Paris-Sud, à Orsay).