Marathon d'Orsay de Mathématiques

Mars 2021

Voici les énoncés des derniers problèmes de la saison 2020–2021 du Marathon d'Orsay de Mathématiques, dont les solutions sont attendues au plus tard le **lundi 5 avril 2021 à 14h** par email à `marathon.orsay@math.u-psud.fr` ou par la poste (voir l'adresse sur https ://www.imo.universite-paris-saclay.fr/marathon). Le bâtiment 307 n'étant encore accessible qu'à très peu de personnes, la boîte en carton ne pourra pas être utilisée cette fois non plus pour le retour des solutions.

Nous vous rappelons que pour que vos solutions puissent être considérées comme correctes, il est indispensable que vous justifiez très soigneusement vos réponses, comme dans une démonstration. Merci d'indiquer clairement votre nom, prénom, année d'études (ou statut), établissement, ville et adresse email.

Problème 13 (semi et complet)

Gaston a garni distraitement 13 ballotins identiques avec des oeufs en chocolat identiques. Après avoir refermé les ballotins, ce grand gaffeur veut vérifier qu'il a placé le même nombre d'oeufs dans chaque ballotin, à l'aide d'une antique balance à plateaux, ne permettant que de comparer deux poids. Mais il s'y prend d'une manière assez inhabituelle : il observe que, quel que soit le ballotin qu'il laisse de côté, il parvient à placer 6 ballotins sur chaque plateau de la balance de sorte qu'elle soit à l'équilibre. Ces observations par Gaston suffisent-elles pour vous assurer que sa répartition des oeufs en chocolat est bien équitable entre tous les ballotins ?

Problème 14 (semi et complet)

Les professeurs d'une école élémentaire organisent un tournoi de calcul mental pour leurs 250 élèves. Chaque paire d'élèves s'affronte une fois dans un duel dont l'un des deux sort vainqueur. A la fin du tournoi, l'un des professeurs examine les résultats et remarque que l'on ne peut pas trouver 3 élèves tels que le premier a remporté son duel contre le deuxième, le deuxième a remporté son duel contre le troisième et le troisième a remporté son duel contre le premier. Combien d'élèves ont remporté au moins 100 duels ?

Problème 15 (complet)

Une puce (si petite qu'elle est assimilée à un point) se déplace dans le plan par des sauts de longueur 1. Comme il s'agit d'une puce mathématicienne et un peu maniaque, elle prend garde à ne se poser qu'en des points du plan dont les deux coordonnées sont rationnelles. Est-il possible qu'après 2021 sauts cette puce se retrouve exactement à son point de départ ?

Problème 16 (complet)

On considère une pyramide $SABCD$ ayant pour base un quadrilatère $ABCD$ dont les diagonales se coupent orthogonalement en un point H, qui est aussi la projection orthogonale du sommet S sur le plan de la base $ABCD$. Soient H_1, H_2, H_3 et H_4 les projections orthogonales de H sur les 4 faces latérales de la pyramide $SABCD$. Soient également H_1', H_2', H_3' et H_4' les projections orthogonales de H sur les 4 côtés de la base $ABCD$.
Est-il vrai que les points H_1, H_2, H_3 et H_4 sont coplanaires et que les points H_1, H_2, H_3, H_4, H_1', H_2', H_3' et H_4' sont situés sur une même sphère ?