Marathon d'Orsay de Mathématiques

Mars 2022

Voici les énoncés des derniers problèmes de la saison 2021–2022 du Marathon d'Orsay de Mathématiques, dont les solutions sont attendues au plus tard le **mardi 19 avril 2022 à 14h** par email à `marathon.math@universite-paris-saclay.fr`, par la poste (voir l'adresse sur https ://www.imo.universite-paris-saclay.fr/marathon), ou déposées dans une boîte en carton prévue à cet effet au rez-de-chaussée du bâtiment 307, dans la salle des casiers à courrier située à droite du grand hall, juste après avoir franchi l'entrée principale.

Nous vous rappelons que pour que vos solutions puissent être considérées comme correctes, il est indispensable que vous justifiez très soigneusement vos réponses, comme dans une démonstration. Merci d'indiquer clairement votre nom, prénom, année d'études (ou statut), établissement, ville et adresse email.

Problème 13 (semi et complet)

Durant leur semaine de vacances, un groupe de 16 étudiantes en mathématiques ont proposé leur aide aux élèves d'un lycée qui sont en difficulté dans cette matière. Chacun des 5 jours de cette semaine, chaque étudiante a aidé exactement un élève, qui est soit en seconde, soit en première, soit en Terminale.
Montrez que l'on peut trouver 2 jours de cette semaine et 2 étudiantes du groupe de sorte que les 4 élèves aidés par ces étudiantes durant ces jours-là sont tous en seconde, tous en première ou tous en Terminale.

Problème 14 (semi et complet)

Olivier considère une suite strictement croissante de nombres entiers positifs : $0 < a_1 < a_2 < a_3 \ldots$ Il décide d'appeler "composé" tout entier a_n dans la suite qui peut s'écrire comme la somme de certains des entiers précédents $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ dans la suite (éventuellement avec des répétitions). D'autre part, il appelle "primitif" chacun des autres entiers dans la suite. Par exemple, si la suite d'Olivier commence par $4, 8, 9, 13, \ldots$ alors 4 est primitif, $8 = 4 + 4$ est composé, 9 est primitif, et $13 = 4 + 9$ est composé.
Olivier observe que dans sa suite d'entiers a_n il n'y a qu'un nombre fini d'entiers primitifs. Il fait part de cette observation à son amie Estelle, qui lui répond : "Tu aurais fait la même observation, quelle que soit la suite strictement croissante d'entiers positifs utilisée !"
Expliquez à Olivier le raisonnement effectué par Estelle pour arriver à cette conclusion.

Problème 15 (complet)

Alexandra joue avec le rouleau de papier de la caisse enregistreuse de son oncle. Elle y découpe des bandes de papier ayant la largeur du rouleau, qui est de 5 centimètres, et d'une longueur arbitraire. Elle colle ensuite soigneusement ces bandes de papier sur un panneau mural, avec la largeur de 5 centimètres placée horizontalement ou verticalement, et de sorte qu'il n'y ait aucun chevauchement entre les bandes. Elle parvient ainsi à recouvrir exactement toute la surface d'un grand rectangle sur ce panneau mural. Alexandra mesure ensuite les longueurs des côtés de ce grand rectangle : est-il vrai que l'une de ces longueurs est un multiple de 5 centimètres ?

Problème 16 (complet)

Rémi a décidé de reprendre son entraînement en vue du prochain Marathon de la Vallée de Chevreuse. Il court avec une torche allumée à la main, sur une piste formant une boucle fermée le long de laquelle sont disposés un grand nombre de flambeaux éteints. A partir de son point de départ, il allume un flambeau sur deux : il ignore le premier flambeau éteint qu'il dépasse, puis allume le second flambeau éteint qu'il atteint (ignorant donc les flambeaux qu'il a déjà allumés), et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les flambeaux soient allumés.

Sachant que le dernier flambeau allumé par Rémi est le 33ème qu'il a atteint durant son premier tour de piste, combien de flambeaux peuvent se trouver le long de cette piste ? (Il s'agit de trouver tous les nombres de flambeaux qui sont compatibles avec les informations ci-dessus.)

Problème 8bis (complet)

Les participants n'ayant pas répondu correctement au problème 8 peuvent compenser cela en répondant correctement au problème 8bis. Les autres participants peuvent également répondre à ce problème : leurs réponses seront corrigées, mais ne leur rapporteront pas de point supplémentaire.

Martin s'amuse à programmer une animation sur son ordinateur, qui s'affiche à l'écran dans un grand échiquier 21×22. Il y place n pions dans n cases distinctes. Toutes les 10 secondes, tous les pions se déplacent simultanément vers une case adjacente : vers le haut, le bas, la gauche ou la droite. Pour des raisons esthétiques, Martin décide d'imposer deux règles : d'une part, deux pions différents ne peuvent jamais aboutir au même instant dans la même case, et d'autre part, aucun pion ne peut se déplacer deux fois de suite horizontalement ou deux fois de suite verticalement. Quel nombre n de pions au maximum peut placer Martin sur l'échiquier, pour que son animation puisse se poursuivre indéfiniment, c'est-à-dire sans que ces règles empêchent de déplacer les pions au bout d'un temps fini ?