Marathon d'Orsay de Mathématiques

Solutions de la quatrième vague de mars 2022

Voici les solutions de la quatrième vague de problèmes, avec les noms des participants qui ont fourni une solution correcte.

Solution du problème 13 : On peut représenter l'aide fournie par les étudiantes dans un tableau 5×16, en écrivant un symbole dans la case dans la $i$ème ligne et la $j$ème colonne suivant la personne aidée le $i$ème jour par la $j$ème étudiante : T pour un élève de Terminale, 1 pour un élève de première et 2 pour un élève de seconde. L'objectif est alors de montrer qu'il existe deux lignes et deux colonnes du tableau déterminant 4 cases avec le même symbole. Dans chaque colonne de 5 cases, on peut trouver (au moins) deux paires de cases avec le même symbole (éventuellement avec une case partagée par les deux paires) : avec 3 symboles pour 5 cases, il y a au moins 2 cases ayant le même symbole (première paire) ; on retire l'une de ces cases et on répète le même raisonnement avec les 4 cases restantes pour trouver la 2ème paire. Remarquons qu'il y a $\binom{5}{2} = 10$ positions possibles pour une paire de cases dans une colonne de 5 cases, et 3 symboles communs, ce qui donne $10 \times 3 = 30$ types de paires possibles. Comme il y a au moins 2 paires par colonne et 16 colonnes, cela donne $2 \times 16 = 32 > 30$ paires en tout, donc on peut en trouver deux différentes qui sont de même type. Comme elles ont la même position dans leur colonne, elles appartiennent à des colonnes différentes. Comme ces 4 cases ont aussi le même symbole, elles répondent bien à l'objectif.

Ont fourni une solution correcte : L. Choné (3ème au Collège Evariste Galois, à Bourg-la-Reine), B. Daudin Clavaud (Tle au Lycée Henri-IV, à Paris), A. Mathys (Tle au Lycée Edmond Michelet, à Arpajon), L. Doué (MPSI au Lycée Louis Pasteur, à Neuilly-sur-Seine), S. Gvozdić (L1 maths-info à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), O. Sabatin (LDD2 math-phys à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), J. Clement-Cottuz (1ère année à l'ENSIMAG, à Saint-Martin-d'Hères), R. Khanfir (doctorant à Sorbonne Université, à Paris), J. Muller (doctorant au LAGA -Institut Galilée, à l'Université Sorbonne Paris Nord, à Villetaneuse), D. Collignon (attaché statisticien hors classe au département informatique et télécommunications pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon), C. Romon (secrétaire général de la Mission interministérielle pour la qualité des constructions publiques, à La Défense), l'équipe formée par L. Enderli (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc), I. Israël (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc) et E. Van Der Rest (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc), l'équipe formée par F. Arous (L1 maths à l'Université de Paris, à Paris) et T. De Wolf (1ère année BASc à l'Université de Paris, à Paris et au Sciences Po, à Paris), l'équipe formée par M. Baccara (1ère année à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, à Paris) et S. Baumert (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris), l'équipe formée par S. Bakayoko (3ème année ingénieur à l'Ecole Royale Militaire, à Bruxelles) et N. E. Polneau (1ère année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), l'équipe formée par J. Wang (M1 MFA à l'Université de Paris, à Paris), J. Wang (M1 MFA à l'Université de Paris, à Paris) et Z. Zhu (M1 MFA à l'Université de Paris, à Paris), l'équipe formée par P. Boisseau (M2 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et M. Vermeil (M2 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay).

Solution du problème 14 : Montrons que toute suite strictement croissante a_n d'entiers strictement positifs ne peut comporter qu'au plus a_1 termes primitifs. Tout terme de la suite peut s'écrire de manière unique sous la forme $a_n = q_n a_1 + r_n$ où q_n et r_n sont des entiers ≥ 0 et $r_n < a_1$. Si il existe $m < n$ tel que $r_m = r_n$, alors a_n est composé car $a_n - a_m$ est un multiple positif de a_1. Par conséquent, chaque terme primitif a_n de la suite doit avoir une valeur de r_n entre 0 et $a_1 - 1$ distincte de celles des autres termes primitifs de la suite. Comme il n'y a que a_1 valeurs possibles, il ne peut y avoir qu'au plus a_1 termes primitifs, et en particulier qu'un nombre fini de tels termes.

Ont fourni une solution correcte : L. Choné (3ème au Collège Evariste Galois, à Bourg-la-Reine), P. Duvivier (1ère au Lycée René Cassin, à Arpajon), C. Hebey (1ère au Lycée Charlemagne, à Paris), Y. Sepulchre (1ère au Lycée François-Joseph Talma, à Brunoy), O. Frances (Tle au Lycée Lucie Aubrac, à Courbevoie), H. Chalandon-Goskrzynski (MPSI à l'Optimal, à Paris), L. Doué (MPSI au Lycée Louis Pasteur, à Neuilly-sur-Seine), S. Gvozdić (L1 maths-info à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), O. Sabatin (LDD2 mathphys à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), J. Clement-Cottuz (1ère année à l'ENSIMAG, à Saint-Martin-d'Hères), R. Khanfir (doctorant à Sorbonne Université, à Paris), J. Muller (doctorant au LAGA -Institut Galilée, à l'Université Sorbonne Paris Nord, à Villetaneuse), D. Collignon (attaché statisticien hors classe au département informatique et télécommunications pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon), C. Romon (secrétaire général de la Mission interministérielle pour la qualité des constructions publiques, à La Défense), l'équipe formée par L. Enderli (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc), I. Israël (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc) et E. Van Der Rest (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc), l'équipe formée par F. Arous (L1 maths à l'Université de Paris, à Paris) et T. De Wolf (1ère année BASc à l'Université de Paris, à Paris et au Sciences Po, à Paris), l'équipe formée par M. Baccara (1ère année à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, à Paris) et S. Baumert (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris), l'équipe formée par S. Bakayoko (3ème année ingénieur à l'Ecole Royale Militaire, à Bruxelles) et N. E. Polneau (1ère année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), l'équipe formée par J. Wang (M1 MFA à l'Université de Paris, à Paris), J. Wang (M1 MFA à l'Université de Paris, à Paris) et Z. Zhu (M1 MFA à l'Université de Paris, à Paris), l'équipe formée par P. Boisseau (M2 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et M. Vermeil (M2 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), l'équipe formée par E. Bonnafoux (doctorant au CMLS, à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), A. Gautier (doctorante à l'Université de Berne, à Berne) et A.-B. Ulusoy (doctorant au LIX, à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau).

Solution du problème 15 : Montrons que la longueur de l'un des côtés du grand rectangle est nécessairement un multiple de 5 centimètres. Superposons au grand rectangle un damier dont les cases carrées ont des côtés de $\frac{5}{2}$ centimètres et sont en alternance noires et blanches. On aligne le damier et le grand rectangle de sorte que l'une des cases du damier soit exactement dans l'un des coins du grand rectangle. Remarquons que, quelle que soit sa position au sein du grand rectangle, toute bande de largeur 5 centimètres sera exactement à moitié couverte de noir et à moitié couverte de blanc. Par conséquent, le grand rectangle tout entier possède la même propriété. Supposons par contradiction que le grand rectangle n'ait aucune de ses dimensions qui soit un multiple de 5 centimètres, de sorte que ses dimensions (en centimètres) sont $5m + \varepsilon$ et $5n + \delta$ pour des entiers m, n et des réels $0 < \varepsilon, \delta < 5$. On peut décomposer ce grand rectangle en 4 rectangles ayant pour dimensions $5m \times 5n$, $5m \times \delta$, $\varepsilon \times 5n$ et $\varepsilon \times \delta$. Les trois premiers ont au moins une dimension qui est un multiple de 5 centimètres et sont donc couverts à moitié de noir et à moitié de blanc. Quant au dernier, il est contenu dans un fragment de damier de 2×2 cases. Si ε et $\delta < \frac{5}{2}$, ce rectangle n'est que d'une seule couleur. Si $\varepsilon \geq \frac{5}{2}$ et $\delta < \frac{5}{2}$, ce rectangle a une aire

$(\varepsilon - \frac{5}{2})\delta$ d'une couleur et une aire strictement plus grande $\frac{5}{2}\delta$ de l'autre couleur (puisque $\varepsilon - \frac{5}{2} < \frac{5}{2}$), et une conclusion similaire est obtenue si $\varepsilon < \frac{5}{2}$ et $\delta \geq \frac{5}{2}$. Enfin, si $\varepsilon \geq \frac{5}{2}$ et $\delta \geq \frac{5}{2}$, ce rectangle a une aire $\frac{5}{2}(\delta - \frac{5}{2} + \varepsilon - \frac{5}{2})$ d'une couleur et une aire strictement plus grande $(\varepsilon - \frac{5}{2})(\delta - \frac{5}{2}) + \frac{5}{2} \times \frac{5}{2}$ de l'autre couleur, puisque $((\varepsilon - \frac{5}{2}) - \frac{5}{2})((\delta - \frac{5}{2}) - \frac{5}{2}) > 0$. Dans tous les cas, le grand rectangle n'est pas couvert à moitié de noir et à moitié de blanc comme il le devrait, nous donnant la contradiction souhaitée.

Ont fourni une solution correcte : B. Daudin Clavaud (Tle au Lycée Henri-IV, à Paris), L. Doué (MPSI au Lycée Louis Pasteur, à Neuilly-sur-Seine), S. Gvozdić (L1 maths-info à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), R. Khanfir (doctorant à Sorbonne Université, à Paris), J. Muller (doctorant au LAGA -Institut Galilée, à l'Université Sorbonne Paris Nord, à Villetaneuse), D. Collignon (attaché statisticien hors classe au département informatique et télécommunications pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon), l'équipe formée par L. Enderli (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc), I. Israël (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc) et E. Van Der Rest (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc), l'équipe formée par M. Baccara (1ère année à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, à Paris) et S. Baumert (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris), l'équipe formée par P. Boisseau (M2 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et M. Vermeil (M2 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay).

Solution du problème 16 : Soit n le nombre total de flambeaux disposés le long de la piste. Numérotons-les de 1 à n dans le sens de la course de Rémi, en commençant par le premier flambeau qu'il atteindra. Soit d_n le numéro du dernier flambeau allumé par Rémi. Montrons par récurrence sur n que si n s'écrit en binaire $1b_1 \dots b_k$ avec les b_i valant 0 ou 1, alors d_n s'écrit en binaire $b_1 \dots b_k 1$. Si $n = 2$ (ou 10 en binaire) alors $d_2 = 1$ (ou 01 en binaire) et si $n = 3$ (ou 11 en binaire) alors $d_3 = 3$ (ou 11 en binaire) comme souhaité. Supposons le résultat correct pour n flambeaux et montrons-le pour $n+1$ flambeau. Juste après le début de sa course, quand Rémi allume le 2ème flambeau, il ne lui en reste plus que n à allumer. Pour comparer avec la situation à n flambeaux, il faut les renuméroter de la manière suivante : le flambeau ℓ (avec $2 < \ell \leq n+1$) devient le numéro $\ell - 2$ et le flambeau 1 devient le numéro n. Si $d_n = n$, la comparaison des écritures binaires de n et d_n montre que celles-ci sont toutes deux égales à $11 \dots 1$ avec $k+1$ chiffres 1, de sorte que $n+1$ s'écrit en binaire $100 \dots 0$ avec $k+1$ chiffres 0. Mais dans ce cas d_{n+1} est le flambeau qui a été renuméroté n, c'est-à-dire le flambeau 1, ce qui s'écrit en binaire $00 \dots 01$ comme souhaité. Si $d_n \neq n$, alors le décalage de 2 unités dans la renumérotation des flambeaux montre que $d_{n+1} = d_n + 2$. D'autre part, n s'écrit en binaire $1b_1 \dots b_k$ où les b_i ne sont pas tous égaux à 1 (puisque ce cas correspondrait à $d_n = n$). Donc $n+1$ s'écrit en binaire $1c_1 \dots c_k$ où $c_1 \dots c_k$ est le résultat en binaire de l'addition de 1 et de $b_1 \dots b_k$. Comme d_n s'écrit en binaire $b_1 \dots b_k 1$, alors $d_n + 2 = d_{n+1}$ s'écrit en binaire $c_1 \dots c_k 1$ comme souhaité. Si $d_n = 33$, ce qui s'écrit en binaire 100001, alors n doit s'écrire en binaire $10 \dots 010000$, avec un nombre arbitraire $m \geq 0$ de chiffres 0 entre les deux chiffres 1. En d'autres termes, $n = 16 + 32 \times 2^m$ avec $m \geq 0$.

Ont fourni une solution correcte : L. Doué (MPSI au Lycée Louis Pasteur, à Neuilly-sur-Seine), S. Gvozdić (L1 maths-info à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), R. Khanfir (doctorant à Sorbonne Université, à Paris), J. Muller (doctorant au LAGA -Institut Galilée, à l'Université Sorbonne Paris Nord, à Villetaneuse), D. Collignon (attaché statisticien hors classe au département informatique et télécommunications pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon), C. Romon (secrétaire général de la Mission interministérielle pour la qualité des constructions publiques, à La Défense), l'équipe formée par F. Arous (L1 maths à l'Université de Paris, à Paris) et T. De Wolf (1ère année BASc à l'Université de Paris, à Paris et au Sciences Po, à Paris), l'équipe formée par M. Baccara (1ère année à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, à Paris) et S. Baumert (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris), l'équipe formée par S. Bakayoko (3ème année ingénieur à l'Ecole Royale Militaire, à Bruxelles) et N. E. Polneau (1ère année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), l'équipe formée par P. Boisseau (M2 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et M. Vermeil (M2 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay).

Solution du problème 8bis : Toute case de l'échiquier est identifiée par son numéro de ligne (de 1 à 21) et son numéro de colonne (de 1 à 22). Colorions en rouge les cases dont les numéros de ligne et de colonne sont pairs, et en bleu les cases dont les numéros de ligne et de colonne sont impairs ; les autres cases restent blanches. Il y a donc $10 \times 11 = 110$ cases rouges, $11 \times 11 = 121$ cases bleues et $21 \times 22 - 110 - 121 = 231$ cases blanches. Remarquons que tous les pions sur une case bleue se retrouvent sur une case rouge au bout de 20 secondes, car leur numéro de ligne et leur numéro de colonne doivent chacun changer d'une unité. Par conséquent, on ne peut pas avoir plus de 110 pions sur des cases bleues à tout instant, et donc aussi pas plus de 220 pions sur des cases rouges ou bleues à tout instant. Remarquons que tous les pions sur une case blanche se retrouvent sur une case rouge ou bleue au bout de 10 secondes. Par conséquent, on ne peut pas avoir plus 220 pions sur des cases blanches à tout instant. Au total, on ne peut donc pas avoir plus de 440 pions sur l'échiquier.
D'autre part, il est possible de disposer 440 pions sur l'échiquier de manière à ce que l'animation puisse se poursuivre indéfiniment. On remplit pour cela un rectangle 20×22 dans l'échiquier avec 440 pions. On découpe ce rectangle en carrés 2×2 et on fait se déplacer les pions dans chaque carré par une rotation d'un quart de tour autour de son centre toutes les 10 secondes.
Par conséquent, Martin peut placer au maximum 440 pions sur l'échiquier.

Ont fourni une solution correcte : B. Daudin Clavaud (Tle au Lycée Henri-IV, à Paris), D. Collignon (attaché statisticien hors classe au département informatique et télécommunications pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), l'équipe formée par P. Boisseau (M2 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et M. Vermeil (M2 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), l'équipe formée par E. Bonnafoux (doctorant au CMLS, à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), A. Gautier (doctorante à l'Université de Berne, à Berne) et A.-B. Ulusoy (doctorant au LIX, à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau).