Marathon d'Orsay de Mathématiques

Mars 2024

Voici les énoncés des derniers problèmes de la saison 2023–2024 du Marathon d'Orsay de Mathématiques, dont les solutions sont attendues au plus tard le **mardi 2 avril 2024 à 14h** par email à `marathon.math@universite-paris-saclay.fr`, par la poste (voir l'adresse sur https ://www.imo.universite-paris-saclay.fr/marathon), ou déposées dans une boîte en carton prévue à cet effet au rez-de-chaussée du bâtiment 307, dans la salle des casiers à courrier située à droite du grand hall, juste après avoir franchi l'entrée principale.

Nous vous rappelons que pour que vos solutions puissent être considérées comme correctes, il est indispensable que vous justifiez très soigneusement vos réponses, comme dans une démonstration. Merci d'indiquer clairement votre nom, prénom, année d'études (ou statut), établissement, ville et adresse email.

Problème 13 (semi et complet)

Hannah et Brahim jouent avec un grand tas de 2024 jetons posé sur une table. Chacun à son tour, les deux camarades retirent un certain nombre de jetons de la table de jeu : au moins un jeton, mais pas plus de la moitié des jetons encore sur la table. La personne qui laisse un seul jeton sur la table est déclarée perdante. Si Hannah joue en premier, et que les deux adversaires jouent de manière optimale, qui va remporter la partie ?

Problème 14 (semi et complet)

Alana a tracé à l'encre de Chine des cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ (de rayons pas forcément égaux) s'intersectant en deux points distincts A et B. Elle dessine ensuite au crayon un plus petit cercle $\mathscr{C}_3$ qui est tangent intérieurement à chacun des cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. Elle appelle alors X le point de tangence de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_3$, Y le point de tangence de $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$, et Z le point d'intersection de la droite AB et du cercle $\mathscr{C}_3$ qui est le plus proche de A. Enfin, elle appelle P le deuxième point d'intersection de la droite XZ et du cercle $\mathscr{C}_1$, et Q le deuxième point d'intersection de la droite YZ et du cercle $\mathscr{C}_2$.
Alana recommence son dessin pour les mêmes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ mais pour plusieurs autres choix de $\mathscr{C}_3$, et observe que les points P et Q restent inchangés. Pour en avoir le cœur net, Alana démontre alors cette jolie propriété. A votre tour, montrez que les points $P \in \mathscr{C}_1$ et $Q \in \mathscr{C}_2$ définis ci-dessus ne dépendent pas du choix du cercle $\mathscr{C}_3$.

Problème 15 (complet)

Les 2024 variables réelles $x_1, \ldots, x_{2024}$ sont toutes dans l'intervalle $[-2, 3]$ et ont pour somme 500. Avec ces contraintes, quelle est la plus grande valeur possible de l'expression

$$\sum_{i=1}^{2024} x_i^4 = x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{2024}^4 \ ?$$

Problème 16 (complet)

Aïcha et Elsie jouent avec un échiquier de $m \times n$ cases, où m, n sont des entiers ≥ 4. Au début de la partie, l'échiquier est vide et Aïcha dépose un cavalier sur la case de son choix. Ensuite, Elsie et Aïcha jouent alternativement de la manière suivante.
D'une part, Elsie dépose une tour sur une case vide de l'échiquier écartée de la case où Aïcha vient de jouer d'une case horizontalement et de deux cases verticalement, ou bien de deux cases horizontalement et d'une case verticalement.
D'autre part, Aïcha dépose un cavalier sur une case vide de l'échiquier dans la même ligne ou dans la même colonne que la case où Elsie vient de jouer.
Finalement, la première joueuse qui ne sait pas déposer une pièce suivant ces règles lorsque c'est son tour est déclarée perdante. Quelles sont toutes les valeurs de (m, n) pour lesquelles Aïcha est certaine de gagner si elle joue de manière optimale ?

université PARIS-SACLAY
FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY
FMJH
cnrs