Marathon d'Orsay de Mathématiques

Novembre 2015

Voici les 3 problèmes suivants, dont les solutions sont attendues au plus tard le **jeudi 10 décembre 2015 à 14h**, via `marathon.orsay@math.u-psud.fr` ou la boîte en carton au rez-de-chaussée du bâtiment 425.

Problème 4

On peut numéroter de 1 à 100 les cases d'un échiquier 10×10 de $100!$ manières différentes. Pour chacune de ces manières, on note Δ la plus grande différence entre les numéros de 2 cases adjacentes (ayant exactement un côté ou un sommet en commun). Quelle est la valeur minimale de Δ sur l'ensemble des numérotations possibles ?

Problème 5

Soit n un entier strictement positif. Quelle est la plus grande puissance de 3 qui divise l'entier $10^n - 1$?

Problème 6

Le prestidigitateur Hokus a disposé devant lui une rangée de n gobelets retournés, avec une bille cachée sous l'un d'eux. Un spectateur se porte volontaire pour essayer de trouver la bille. A chaque tentative, le spectateur peut soulever un unique gobelet de son choix. Si il n'y trouve pas la bille, Hokus manipule les gobelets de sorte que la position de la bille soit décalée d'exactement un gobelet dans l'un des deux sens possibles (sauf si la bille était en bout de rangée : il n'y a alors qu'un sens possible). Existe-t-il une stratégie permettant de trouver la bille à coup sûr (quoi que fasse Hokus) en un nombre fini de tentatives ? Si oui, expliciter cette stratégie et si non, prouver qu'une telle stratégie n'existe pas.

Voici les solutions des problèmes précédents, avec les noms de ceux qui ont fourni une solution correcte. Félicitations à Louis Escande, en seconde au Lycée Blaise Pascal, qui a résolu le problème 2.

Solution du problème 1 : Remarquons que $r = p(2)$ est un entier. D'autre part, l'entier $p(r) - p(2) = 2$ est divisible par $r - 2$ car $r^i - 2^i = (r-2)\sum_{j=1}^{i} r^{i-j}2^{j-1}$. Donc $r - 2 \in \{\pm 1, \pm 2\}$ de sorte que $r \in \{0, 1, 3, 4\}$. Toutes ces valeurs sont possibles car pour chacune d'elles, le polynôme $p(x) = \frac{2}{r-2}(x-2) + r$ est à coefficients entiers et satisfait

$p(2) = r$ et $p(r) = r + 2$.
Plusieurs participants ont omis de faire cette dernière vérification, ce qui rend leur solution incomplète !

Ont fourni une solution correcte : S. Bourguignon, S. Filippas (L1 MPI), N. Camps, P. Frixons, A. Segovia, T. Stoskopf (L3 MFA), P. Jiménez, M. Karbevski, Q. Manière (L3 MFA + magist.), P. Le Couteur, C. Lemonnier (M1 MF), M. Flammarion, C. Zhangchi (M1 MF + magist.) et I. Konan (M2 AAG).

Solution du problème 2 : Soient O_1 le milieu de AC, O_3 le milieu de MP, O_2 le centre de $ABMN$ et O_4 le centre de $BCQP$. Le théorème de Thalès appliqué aux triangles CAM et CPM avec les milieux O_1 de AC, O_2 de AM, O_3 de MP et O_4 de CP donne $|O_1O_2| = \frac{1}{2}|CM| = |O_3O_4|$ et $O_1O_2 \parallel CM \parallel O_3O_4$. De même, le théorème de Thalès appliqué aux triangles ACP et AMP donne $|O_1O_4| = \frac{1}{2}|AP| = |O_2O_3|$ et $O_1O_4 \parallel AP \parallel O_2O_3$. D'autre part, la rotation de centre B et d'un quart de tour envoie C sur P et M sur A, de sorte que $|CM| = |AP|$ et $CM \perp AP$. On déduit de toutes les relations que $O_1O_2O_3O_4$ est un carré.

Ont fourni une solution correcte : L. Escande (2nde au Lycée Blaise Pascal), S. Bourguignon (L1 MPI), N. Camps, P. Frixons, T. Stoskopf (L3 MFA), Q. Manière (L3 MFA + magist.), M. Brunet (M1 phys fond + L3 MFA), P. Le Couteur, H.-W. Zhang (M1 MF), M. Flammarion, C. Zhangchi (M1 MF + magist.), I. Konan et X. Xu (M2 AAG).

Solution du problème 3 : Représentons ce club par un graphe dont les sommets sont les m membres et les arêtes relient deux membres ayant un ou plusieurs timbres en commun. Comme n arêtes quittent chaque sommet vers des sommets distincts parmi les $m-1$ autres sommets, on a $n \leq m - 1$. Comme ce graphe comporte $\frac{mn}{2}$ arêtes, le produit mn est pair. Inversément, si (m, n) satisfait ces deux conditions, il existe un graphe à m sommets et dont chaque sommet est l'extrémité de n arêtes. Numérotons les sommets de 0 à $m - 1$. Si n est pair, on joint chaque sommet i aux sommets $j = i \pm 1$, $i \pm 2$, …, $i \pm \frac{n}{2}$ (modulo m). Si n est impair alors m est pair et on joint chaque sommet i aux sommets $j = i \pm 1$, $i \pm 2$, …, $i \pm \frac{n-1}{2}$ et $i + \frac{m}{2}$ (modulo m). Ceci définit bien des graphes car i est relié à j si et seulement si j est relié à i, et ces graphes à m sommets ont bien n arêtes partant de chaque sommet.

Ont fourni une solution correcte : S. Bourguignon (L1 MPI), P. Frixons (L3 MFA), Q. Manière (L3 MFA + magist.), P. Le Couteur, C. Lemonnier (M1 MF), G. Chevallier, M. Flammarion, C. Zhangchi (M1 MF + magist.), I. Konan et X. Xu (M2 AAG).