Marathon d'Orsay de Mathématiques

Novembre 2016

Voici les 3 problèmes suivants, dont les solutions sont attendues au plus tard le **lundi 12 décembre 2016 à 14h**, via `marathon.orsay@math.u-psud.fr` ou la boîte en carton au rez-de-chaussée du bâtiment 425.

Problème 4

Un grand tas de jetons est placé sur une table. Une fois par jour, on peut en retirer certains, en commençant par un seul jeton le premier jour. Chaque jour suivant, on peut retirer soit autant de jetons, soit le double de jetons que le jour précédent. Quel est le nombre de jours minimal requis pour retirer exactement 2016 jetons ?

Problème 5

Pour quelles valeurs de $c \in \mathbb{R}$ existe-t-il (au moins) une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et non constante telle que $f(x^2 + c) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$?

Problème 6

On a placé 128 reines sur un échiquier 128×128 de sorte qu'aucune reine ne peut en attaquer une autre (horizontalement, verticalement ou en diagonale, comme aux échecs). En traçant les médianes de l'échiquier, on divise celui-ci en 4 morceaux 64×64. Montrer que chacun de ces morceaux contient au moins une reine.

Voici les solutions des problèmes précédents, avec les noms de ceux qui ont fourni une solution correcte. Félicitations à Nicolas Déhais, en seconde au Lycée Blaise Pascal, qui a résolu le problème 1.

Solution du problème 1 : Dans l'équation $a(a+1) = b^3$, les facteurs a et $a+1$ sont premiers entre eux, de sorte que chacun est le cube d'un entier : $a = m^3$ et $a+1 = n^3$ avec $m, n \in \mathbb{Z}$ et $n > m$. Alors $1 = n^3 - m^3 = (n-m)(n^2+mn+m^2)$. Donc $n - m = 1$ et aussi $n^2 + mn + m^2 = 1$. En substituant n par $m+1$ dans cette dernière équation, on obtient $3m^2 + 3m = 0$, de sorte que $m = 0$ ou $m = -1$. Ces valeurs correspondent à $(a, b) = (0, 0)$ ou $(a, b) = (-1, 0)$, qui sont les seules solutions entières de l'équation.

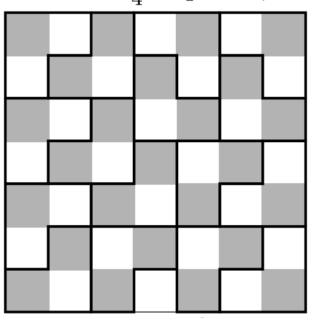
Ont fourni une solution correcte : N. Déhais (2nde, Blaise Pascal), L. Hahn (L1 MPI), D. Lesnoff (L2), A. Astruc (L3 MFA + magist.), T. Berthod (L3 MFA + magist.),

V. Cristiani (L3 MFA + magist.), L. Ertzbischoff (L3 + magist.), A. Goyer (L3 MFA + magist.), P. Frixons (M1 Hadamard), C. Lemonnier (M2 agreg), B. Duvocelle (M2 opti), D. Kadnikov (M2 opti), I. Konan (M2 opti), B. Ghamit (M2 AAG + magist.), C. Zangchi (M2 AAG), T. Paolantoni (doctorant).

Solution du problème 2 : Pour $y \in C_2$ fixé, les milieux des segments xy avec $x \in C_1$ parcourent l'image de C_1 par une homothétie de centre y et de rapport $1/2$. C'est un cercle de rayon $1/2$ dont le centre est situé sur l'image C_2' de C_2 par une homothétie centrée au centre de C_1 et de rapport $1/2$. C_2' est un cercle de rayon $3/2$ et de centre le milieu O du segment joignant les centres de C_1 et C_2. Par l'inégalité triangulaire, les milieux sont à une distance de O comprise entre $3/2 - 1/2 = 1$ et $3/2 + 1/2 = 2$. Inversement, tout point p de cette couronne fermée est obtenu de cette manière car le cercle de centre p et de rayon $1/2$ intersecte C_2'. Le lieu recherché est donc la couronne centrée en O et de rayons 1 et 2. Plusieurs participants ont décrit le bon lieu géométrique, mais n'ont pas montré correctement que chaque point de celui-ci est le milieu d'un segment comme dans l'énoncé du problème.

Ont fourni une solution correcte : T. Berthod (L3 MFA + magist.), A. Goyer (L3 MFA + magist.), P. Frixons (M1 Hadamard), F. Gagelin (M2 agreg), C. Lemonnier (M2 agreg), B. Duvocelle (M2 opti), I. Konan (M2 opti), B. Ghamit (M2 AAG + magist.), C. Zangchi (M2 AAG).

Solution du problème 3 : Il y a $\frac{n+1}{2}$ cases noires dans chaque colonne impaire de l'échiquier, et il y a $\frac{n+1}{2}$ telles colonnes impaires. Deux cases noires distinctes dans des colonnes impaires ne peuvent être recouvertes par une même pièce en L. Il faut donc au moins $\frac{(n+1)^2}{4}$ pièces pour recouvrir toutes les cases noires. Ces pièces vont recouvrir $\frac{3}{4}(n+1)^2$ cases. Lorsque $n = 1, 3$ ou 5, on a $\frac{3}{4}(n+1)^2 > n^2$ de sorte qu'il est impossible de recouvrir toutes les cases noires sans chevauchement ou débordement. Pour $n = 7$, un tel recouvrement est possible avec $16 = \frac{(n+1)^2}{4}$ pièces, comme illustré ci-dessous.



A partir de ce point de départ, on montre par induction sur n qu'il existe un recouvrement des cases noires avec $\frac{(n+1)^2}{4}$ pièces (ce qui est le minimum requis comme vu ci-dessus) pour tout n impair ≥ 7. Pour passer d'un échiquier $n \times n$ à un échiquier $(n+2) \times (n+2)$, on rajoute deux rectangles $2 \times n$ et un carré 2×2. Une pièce suffit pour le carré. Chaque rectangle se décompose en $\frac{n-3}{2}$ tels carrés et un rectangle 3×2 (recouvert par 2 pièces). Au total, on ajoute donc $1 + 2\frac{n-3}{2} + 2 \cdot 2 = n + 2$ pièces. Le recouvrement total utilise donc $\frac{(n+1)^2}{4} + n + 2 = \frac{(n+3)^2}{4}$ pièces comme souhaité.
Plusieurs participants ont trouvé le nombre minimal de pièces requis sans en donner de preuve correcte. Un argument inductif ne suffit pas, car rien ne dit que la solution optimale est obtenue en rajoutant successivement des bandes en L de largeur 2 : il est nécessaire de prouver une borne inférieure sur le nombre minimal de pièces, comme ci-dessus.

Ont fourni une solution correcte : P. Frixons (M1 Hadamard), I. Konan (M2 opti), B. Ghamit (M2 AAG + magist.), C. Zangchi (M2 AAG).