

## MARATHON D'ORSAY DE MATHÉMATIQUES

Novembre 2017

Le Marathon d'Orsay de Mathématiques est une activité mathématique et ludique qui vous est proposée en dehors de tout cadre d'études. Vous trouverez quelques problèmes de mathématiques ci-dessous. Leur résolution ne relève pas de l'application de recettes enseignées dans des cours avancés, mais nécessite plutôt une réflexion approfondie et une adaptation aux situations nouvelles.

Pour résoudre ces problèmes correctement, il vous est demandé de justifier très soigneusement vos réponses, comme dans une démonstration. Vos solutions peuvent être envoyées par la poste (voir l'adresse sur <http://www.math.u-psud.fr/marathon>), par email à [marathon.orsay@math.u-psud.fr](mailto:marathon.orsay@math.u-psud.fr) ou déposées dans une boîte en carton prévue à cet effet au rez-de-chaussée du bâtiment 425, dans le couloir à droite du hall d'entrée principal, à hauteur du visage après le premier groupe de casiers.

Si vous répondez à plusieurs problèmes, il vous est demandé de le faire sur des feuilles séparées. Toutes les solutions doivent nous parvenir au plus tard le **lundi 4 décembre 2017 à 14h**. Les solutions reçues tardivement ne seront plus prises en considération. Merci d'indiquer clairement votre nom, prénom, année d'études (ou statut), établissement, ville et adresse email (pour recevoir les problèmes suivants). Ceux qui souhaitent recevoir les énoncés des problèmes suivants sans fournir de solutions pour les problèmes ci-dessous, peuvent le demander à l'adresse email ci-dessus.

Les noms de ceux ayant fourni une solution correcte seront listés lors de la parution des problèmes suivants. Tous les participants ayant résolu au moins un problème durant l'année 2017-2018 seront invités à la grande remise des prix à Orsay en fin d'année.

### Problème 1 (semi et complet)

Un épicier vend des dosettes de café à l'unité, de 4 marques différentes. Pour chaque marque, une dosette coûte 35 centimes et a un poids annoncé de 5 grammes. Jean a été averti par un ami que l'une de ces 4 marques remplit un peu moins ses dosettes, qui ne pèsent que 4,5 grammes, mais son ami a oublié de quelle marque il s'agit. Pour le savoir, Jean peut acheter autant de dosettes de chaque marque qu'il le souhaite chez l'épicier, puis se rendre à la pharmacie pour y utiliser une balance de précision (affichant le poids mesuré à 0,1 gramme près). Mais la pharmacienne, qui a le sens des affaires, lui facturera 2 euros pour chaque pesée effectuée sur sa précieuse balance. Combien devra déboursier Jean au minimum pour déterminer à coup sûr quelle marque triche sur le café ?

### Problème 2 (semi et complet)

Deux cercles  $C_1$  et  $C_2$  de rayon 1 et tangents extérieurement sont tracés dans un parallélogramme  $ABCD$ , de sorte que  $C_1$  est tangent aux côtés  $AB$ ,  $BC$  et  $CD$ , et que  $C_2$  est tangent aux côtés  $CD$ ,  $DA$  et  $AB$ . Sur le côté  $AB$ , la distance entre  $A$  et le point de tangence avec le cercle le plus proche est égale à  $\sqrt{3}$ . Quelle est l'aire du parallélogramme  $ABCD$  ?

### Problème 3 (complet)

Trouver tous les couples  $(a, b)$  d'entiers strictement positifs satisfaisant  $a^2 + 2 = b(a + 3)$ .

### Problème 4 (complet)

Rémi vient de participer au célèbre Marathon de la Vallée de Chevreuse. Pour la phase finale de son entraînement durant les 45 jours précédant la compétition, il s'était imposé les règles suivantes :

- courir chaque jour pendant exactement 1, 2 ou 3 heures ;
- durant l'ensemble de ces 45 jours, courir pendant au plus 75 heures au total.

Montrer que l'on peut trouver plusieurs jours consécutifs de cette période d'entraînement durant lesquels Rémi a couru pendant exactement 14 heures en tout.