Marathon d'Orsay de Mathématiques

Novembre 2018

Voici les énoncés des problèmes suivants, dont les solutions sont attendues au plus tard le **lundi 10 décembre 2018 à 14h**, par la poste (voir l'adresse sur http ://www.math.u-psud.fr/marathon), par email à `marathon.orsay@math.u-psud.fr` ou déposées dans une boîte en carton prévue à cet effet au rez-de-chaussée du bâtiment 307, dans la salle des casiers à courrier située à droite du grand hall, juste après avoir franchi l'entrée principale.

Nous vous rappelons que pour que vos solutions puissent être considérées comme correctes, il est indispensable que vous justifiez très soigneusement vos réponses, comme dans une démonstration. Si vous répondez à plusieurs problèmes, il vous est demandé de le faire sur des feuilles séparées. Merci d'indiquer clairement votre nom, prénom, année d'études (ou statut), établissement, ville et adresse email.

Problème 5 (semi et complet)

Parmi les nombres premiers (les entiers positifs ayant exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et eux-mêmes), quels sont ceux qui peuvent s'écrire à la fois comme la somme de deux nombres premiers ainsi que comme la différence de deux nombres premiers ?

Problème 6 (semi et complet)

Les diagonales du quadrilatère $ABCD$ se coupent en un point M en formant un angle de 60 degrés. Soient O_1, O_2, O_3 et O_4 les centres des cercles circonscrits aux triangles ABM, BCM, CDM et DAM respectivement. Quel est le rapport entre les aires des quadrilatères $ABCD$ et $O_1O_2O_3O_4$?

Problème 7 (complet)

Existe-t-il des fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f \circ g$ est strictement décroissante et $g \circ f$ est strictement croissante ?

Problème 8 (complet)

Quels sont les polyèdres convexes possédant exactement 8 sommets, 12 arêtes et 6 faces, parmi lesquelles on peut trouver 4 faces ayant deux à deux une arête en commun ?