Marathon d'Orsay de Mathématiques

Résultats de la deuxième vague de novembre 2018

Voici les solutions de la deuxième vague de problèmes, avec les noms des participants qui ont fourni une solution correcte.

Solution du problème 5 : Soit p un nombre premier qui est à la fois la somme et la différence de nombres premiers. Comme 2 est le plus petit nombre premier, il n'est pas la somme de nombres premiers, donc p est impair. Par conséquent, p est égal à $q+2$ et à $r-2$, où q et r sont des nombres premiers impairs. En d'autres termes, $p-2, p$ et $p+2$ sont des nombres premiers. Parmi ces trois entiers, il y en a toujours un qui est un multiple de 3. Or le seul multiple de 3 qui est premier est 3. Comme c'est le plus petit nombre premier impair, c'est $p-2$ qui est égal à 3, donc $p=5$ est le seul nombre premier possédant les propriétés demandées.

Ont fourni une solution correcte : C. de Beer (2nde au Lycée Charlemagne, Paris), A. Bigot (1ère S au Lycée Notre Dame du Grandchamp, Versailles), A. Delmotte (1ère S au Lycée Corneille, La Celle-Saint-Cloud), F. Gérard (1ère S au Lycée Notre Dame du Grandchamp, Versailles), C.-M. Stucki (1ère S au Lycée Notre Dame du Grandchamp, Versailles), A. Bonnet (Tle S au Lycée Michelet, Vanves), E. Bourroux (Tle S au Lycée Saint-Louis Saint-Clément, Viry-Chatillon), J. de Sainte Marie (Tle S au Lycée Blaise Pascal, Orsay), N. Déhais (Tle S au Lycée Blaise Pascal, Orsay), S. Kerbourc'h (Tle S au Lycée Michelet, Vanves), P. Lafitte (Tle S au Lycée Fustel de Coulanges, Massy), T. Vargenau (Tle S au Lycée René Cassin, Arpajon), X. Lacour (L1 maths-économie à l'Université Paris-Sud, Orsay), H.-A. Ngo (1ère bachelor, Ecole Polytechnique, Palaiseau), F. M. Tchouli (1ère bachelor, Ecole Polytechnique, Palaiseau), D. Girault (M1 MF + magist. à l'Université Paris-Sud, Orsay), D. Albertin (M2 maths-info à l'Université Paris-Est, Marne-la-Vallée), M. Farid (M2 modélisation aléatoire à l'Université Paris-Diderot, Paris), A. Lucazeau (M2 MEEF à l'Ecole Supérieure de Professorat et d'Education, Caen), Q. Manière (M2 LMFI à l'Université Paris-Diderot, Paris), A. Napame (M2 agreg à l'Université Paris-Sud, Orsay), C. Falcon (doctorant à l'Université Paris-Sud, Orsay), C. Moulin (doctorante à l'Université Paris-Sud, Orsay), D.-L. Vu (doctorant à l'Institut de Physique Théorique du CEA, Gif-sur-Yvette), C. Lemonnier (Prof agrégée au Lycée Le Verrier, Saint-Lô).

Solution du problème 6 : Quitte à renommer les sommets du quadrilatère, on peut supposer que $\widehat{AMB}=60°$. Notons A', B', C' et D' les milieux des segments $[AM], [BM], [CM]$ et $[DM]$. Le centre du circle circonscrit à un triangle étant l'intersection de ses médiatrices, O_1O_2 est perpendiculaire à BM au point B'. De même, O_3O_4 est perpendiculaire à $DM = BD$ en D', de sorte que O_1O_2 est parallèle à O_3O_4. De même, O_2O_3 est parallèle à O_4O_1, de sorte que $O_1O_2O_3O_4$ est un parallélogramme. Son aire est donc donnée par $|O_4O_1||O_1O_2|\sin\widehat{O_4O_1O_2}$. En considérant le quadrilatère $A'MB'O_1$, on voit que $\widehat{O_4O_1O_2}=120°$. Les relations de perpendicularité ci-dessus montrent que le segment $[B'D']$ est la projection orthogonale du segment $[O_1O_4]$ sur la droite BD. En considérant le triangle formé par les droites AM, BM et O_4O_1, on voit que les droites BD et O_4O_1 forment un angle de 30°. Par conséquent, $|O_4O_1| = \frac{|B'D'|}{\cos 30°}$. De même, $|O_1O_2| = \frac{|A'C'|}{\cos 30°}$. D'autre part, l'aire du quadrilatère $ABCD$ est la somme des aire des triangles ABM, BCM, CDM et DAM. L'aire du triangle ABM est donnée par $\frac{1}{2}|AM||BM|\sin\widehat{AMB}$. On a des expressions similaires pour les autres triangles, dans lesquelles on peut toujours utiliser le même angle $\widehat{AMB}$ car le sinus d'un angle est égal au sinus de son supplémentaire. Au total, l'aire du quadrilatère $ABCD$ est donnée par $\frac{1}{2}|AC||BD|\sin\widehat{AMB}$. Le rapport recherché vaut donc

$$\frac{\mathrm{aire}(O_1O_2O_3O_4)}{\mathrm{aire}(ABCD)} = \frac{\frac{|B'D'|}{\cos 30°}\frac{|A'C'|}{\cos 30°}\sin 120°}{\frac{1}{2}|AC||BD|\sin 60°} = \frac{1}{2\sin^2 60°} = \frac{2}{3}.$$

Ont fourni une solution correcte : A. Bigot (1ère S au Lycée Notre Dame du Grandchamp, Versailles), F. Gérard (1ère S au Lycée Notre Dame du Grandchamp, Versailles), C.-M. Stucki (1ère S au Lycée Notre Dame du Grandchamp, Versailles), T. Boquet (Tle S au Lycée Louis Bascan, Rambouillet), J. de Sainte Marie (Tle S au Lycée Blaise Pascal, Orsay), I. Vulcanescu (Tle S au Lycée Saint-Louis Saint-Clément, Viry-Chatillon), H.-A. Ngo (1ère bachelor, Ecole Polytechnique, Palaiseau), D. Girault (M1 MF + magist. à l'Université Paris-Sud, Orsay), A. Lucazeau (M2 MEEF à l'Ecole Supérieure de Professorat et d'Education, Caen), Q. Manière (M2 LMFI à l'Université Paris-Diderot, Paris), D.-L. Vu (doctorant à l'Institut de Physique Théorique du CEA, Gif-sur-Yvette), C. Lemonnier (Prof agrégée au Lycée Le Verrier, Saint-Lô).

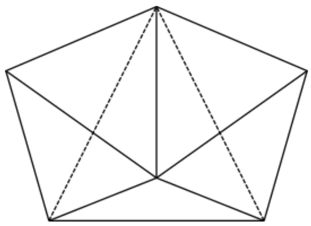
Solution du problème 7 : L'énoncé ne demandait pas que les fonctions f et g soient dérivables, ni même continues ! En fait, il existe bien de telles fonctions f et g. Pour en construire, l'idée est de subdiviser la droite réelle en deux régions R_+ et R_- sur lesquelles f et g sont respectivement croissantes et décroissantes. On s'arrange ensuite pour que f préserve ces régions et pour que g les échange. Cet échange n'aura un effet que lorsque on compose les deux fonctions avec g en premier, ce qui créera la différence souhaitée entre $f \circ g$ et $g \circ f$. Pour préserver R_+, il est commode de choisir $f(x) = x$ pour tout $x \in R_+$. Il est alors naturel de prendre comme fonction décroissante $f(x) = -x$ pour tout $x \in R_-$, avec R_- qui est symétrique par rapport à 0. La région R_+ est essentiellement le complémentaire de R_- et sera donc aussi symétrique par rapport à 0, qui ne sera dans aucune région et sera envoyé sur lui-même. Il faut ensuite faire alterner des morceaux des régions R_+ et R_- de part et d'autre de 0 et utiliser g pour passer d'un morceau au suivant. Par exemple, on peut définir la fonction f par

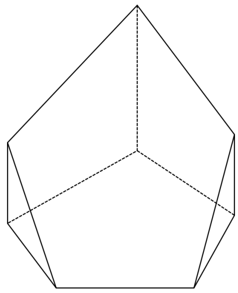
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \,]2^{2k}, 2^{2k+1}], \\ -x & \text{si } x \in \,]2^{2k+1}, 2^{2k+2}], \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -f(-x) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

et la fonction g par $g(x) = 2f(x)$. Alors on a bien que $f(g(x)) = f(2(f(x)) = -2x$ correspond à une fonction décroissante et que $g(f(x)) = 2f(f(x)) = 2x$ correspond à une fonction croissante.

Ont fourni une solution correcte : Q. Manière (M2 LMFI à l'Université Paris-Diderot, Paris), H.-A. Ngo (1ère bachelor, Ecole Polytechnique, Palaiseau), D.-L. Vu (doctorant à l'Institut de Physique Théorique du CEA, Gif-sur-Yvette).

Solution du problème 8 : A partir d'un point intérieur au polyèdre P, projetons-le sur une sphère centrée en ce point. Comme P est convexe, cette projection est bijective et on obtient un graphe Γ ayant 8 sommets, 12 arêtes et découpant la sphère en 6 régions connexes. Considérons le graphe dual Γ' obtenu en associant à chaque région un sommet ; deux sommets sont reliés par une arête si et seulement si les régions correspondantes sont adjacentes (par une arête, de sorte qu'il y a une correspondance bijective entre les arêtes des deux graphes). Le graphe Γ' a 6 sommets et 12 arêtes. Le fait que P comporte 4 faces ayant deux à deux une arête en commun est équivalent au fait que Γ' contient un sous-graphe complet de 4 sommets. Un tel sous-graphe possède 6 arêtes et correspond à un tétraèdre tracé sur la sphère. Pour obtenir Γ', il faut lui ajouter $6 - 4 = 2$ sommets et $12 - 6 = 6$ arêtes. Comme un sommet est le point de départ d'au moins 3 arêtes (c'est le nombre de côtés de la face correspondante de P), chacun des 2 sommets à ajouter est de valence exactement 3. Les 4 faces d'un tétraèdre étant triangulaires et équivalentes, il n'y a qu'une seule manière d'ajouter le premier sommet dans l'une des faces, puis de le relier aux 3 sommets de cette face. On obtient un double tétraèdre ayant 6 faces triangulaires et équivalentes. Il n'y a donc de même qu'une seule manière d'y ajouter le deuxième sommet. On obtient le graphe Γ' illustré ci-dessous à gauche. En considérant la valence des sommets de Γ', on voit que P a 2 faces pentagonales, 2 faces triangulaires et 2 faces qui sont des quadrilatères. Les arêtes de Γ' montrent comment recoller deux à deux les côtés de ces faces, pour obtenir le polyèdre illustré ci-dessous à droite. Les polyèdres recherchés sont exactement ceux qui ont de telles faces agencées de cette manière.





Ont fourni une solution correcte : D. Albertin (M2 maths-info à l'Université Paris-Est, Marne-la-Vallée), A. Lucazeau (M2 MEEF à l'Ecole Supérieure de Professorat et d'Education, Caen), Q. Manière (M2 LMFI à l'Université Paris-Diderot, Paris), C. Moulin (doctorante à l'Université Paris-Sud, Orsay), C. Lemonnier (Prof agrégée au Lycée Le Verrier, Saint-Lô).