

MARATHON D'ORSAY DE MATHÉMATIQUES

Novembre 2019

Voici les énoncés des problèmes suivants, dont les solutions sont attendues au plus tard le **lundi 9 décembre 2019 à 14h**, par la poste (voir l'adresse sur <http://www.math.u-psud.fr/marathon>), par email à marathon.orsay@math.u-psud.fr ou déposées dans une boîte en carton prévue à cet effet au rez-de-chaussée du bâtiment 307, dans la salle des casiers à courrier située à droite du grand hall, juste après avoir franchi l'entrée principale.

Nous vous rappelons que pour que vos solutions puissent être considérées comme correctes, il est indispensable que vous justifiez très soigneusement vos réponses, comme dans une démonstration. Si vous répondez à plusieurs problèmes, il vous est demandé de le faire sur des feuilles séparées. Merci d'indiquer clairement votre nom, prénom, année d'études (ou statut), établissement, ville et adresse email.

Problème 5 (semi et complet)

Arthur trouve dans son grenier un vieux compteur électronique. Celui-ci affiche un nombre entier et est muni de deux boutons $+$ et $-$ pour augmenter ou diminuer la valeur affichée. Mais le compteur est détraqué : lors du k ème appui sur un bouton, le nombre affiché change de $2^k + 1$, vers le haut ou vers le bas suivant que le bouton utilisé est $+$ ou $-$. Par exemple, appuyer sur $+$, $+$ et $-$ fera changer l'affichage de $+3$, $+5$ et -9 . Au départ, le nombre affiché est 0. Est-il possible pour Arthur d'appuyer sur les boutons de manière à faire afficher tous les nombres entiers positifs par le compteur, quitte à lui faire afficher plusieurs fois le même nombre ?

Problème 6 (semi et complet)

Chloé joue à un jeu solitaire avec un grand nombre n de pièces de monnaie placées sur une table. Au départ, toutes les pièces sont tournées du côté pile. Le but est de faire en sorte que toutes les pièces se retrouvent tournées du côté face. Pour cela, Chloé a juste le droit de répéter autant de fois que nécessaire l'opération suivante : choisir $n - 19$ pièces et retourner toutes les pièces choisies. Pour quelles valeurs de $n > 19$ sera-t-il possible à Chloé d'atteindre son objectif ?

Problème 7 (complet)

Rémi s'entraîne à la course sur un circuit fermé en vue du célèbre Marathon de la Vallée de Chevreuse. Un certain nombre (au moins égal à 3) de marques jaunes ont été tracées au sol, en divers endroits de ce circuit. Pour mesurer sa progression dans sa course autour du circuit (qu'il effectue toujours dans le même sens), Rémi décide de tracer avec une craie blanche une nouvelle marque au sol après avoir dépassé exactement deux marques (quelle qu'en soit la couleur). Est-il vrai qu'après un certain temps toutes les paires de marques jaunes seront séparées par au moins une marque blanche ?

Problème 8 (complet)

Julie rend visite à sa grand-mère. Celle-ci lui demande de recouvrir sa table ronde ayant un diamètre de 2 mètres, pendant qu'elle prépare une collation. Mais dans l'armoire du linge de table, Julie ne trouve qu'une grande pile de napperons ronds ayant chacun un diamètre d'un mètre. Quel nombre minimal de napperons devra utiliser Julie pour recouvrir toute la surface de la table (les napperons pouvant se chevaucher) ?