Marathon d'Orsay de Mathématiques

Résultats de la deuxième vague de novembre 2019

Voici les solutions de la deuxième vague de problèmes, avec les noms des participants qui ont fourni une solution correcte.

Solution du problème 5 : Il est possible pour Arthur d'afficher tous les entiers positifs avec une bonne combinaison des boutons. Si Arthur a déjà appuyé k fois sur des boutons, et qu'il appuie m fois sur le bouton $+$, le compteur augmente de $(2^{k+1}+1)+\ldots+(2^{k+m}+1) = m + 2^{k+m+1} - 2^{k+1}$. Si Arthur appuie ensuite une fois sur le bouton $-$, le compteur aura augmenté en tout de $m + 2^{k+m+1} - 2^{k+1} - (2^{k+m+1} + 1) = m - 2^{k+1} - 1$. En prenant $m = 2^{k+1} + 2$, Arthur parvient ainsi à faire augmenter la valeur affichée d'une unité, quel que soit le nombre k d'appuis antérieurs sur les boutons. De cette manière, avec beaucoup de patience, Arthur parviendra à faire afficher tous les entiers positifs.
Plusieurs participants ont mal compris l'énoncé de ce problème et ont juste montré que l'on peut faire afficher un entier positif quelconque.

Ont fourni une solution correcte : M. Billon (1ère S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Fourré (1ère S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), I. Misguich (1ère S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Corbineau (Tle S au Lycée Saint-Charles, à Athis-Mons), A. Plessias (Tle S à l'Institut Notre Dame, à Bourg-la-Reine), M. Baccara (MPSI au Lycée Jean-Baptiste Corot, à Savigny-sur-Orge), J. de Sainte Marie (MPSI au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), M. Delmas (L1 DL math info à l'Université Paris-Sud, à Orsay), A. Zidani (L3 MFA et magistère à l'Université Paris-Sud, à Orsay), D. Girault (M2 AAG à l'Université Paris-Sud, à Orsay), D. Albertin (doctorant au LIGM de l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée, à Champs-sur-Marne), C. Lemonnier (Professeure agrégée au Lycée Napoléon, à L'Aigle), P. Vernier (Professeur de maths au Lycée René Cassin, à Arpajon), B. Berached (ingénieur informaticien), M. Farid (Consultant chez Awalee Consulting, à Paris), H. Jallouli (Analyste quantitatif à la Deutsche Bank).

Solution du problème 6 : Chloé ne peut retourner les n pièces du côté face lorsque n est impair. En effet, $n - 19$ est alors pair de sorte qu'après chaque opération, un nombre total pair de retournements aura eu lieu. Mais pour gagner, Chloé doit retourner chaque pièce un nombre impair de fois, et comme il y a un nombre impair de pièces cela nécessite un nombre total impair de retournements. C'est donc impossible.
Par contre, si n est pair, Chloé pourra toujours y arriver en suivant la méthode élégante proposée par quelques participants, qui se reconnaîtront. Chloé place les n pièces en cercle, puis retourne $n - 19$ pièces consécutives. Avant chaque nouvelle opération, elle décale sa sélection de $n - 19$ pièces d'un cran, toujours dans le même sens. Après avoir effectué cette opération n fois, chaque pièce aura été retournée $n - 19$ fois, donc un nombre impair de fois, ce qui la met du côté face.

Ont fourni une solution correcte : M. Billon (1ère S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Fourré (1ère S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), S. Meziane (1ère SMP au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Miller (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc), L. Champignon (Tle S au Lycée Jean Vilar, à Plaisir), A. Corbineau (Tle S au Lycée

Saint-Charles, à Athis-Mons), J. de Sainte Marie (MPSI au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), N. Déhais (MPSI au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), M. Delmas (L1 DL math info à l'Université Paris-Sud, à Orsay), A. Zidani (L3 MFA et magistère à l'Université Paris-Sud, à Orsay), D. Girault (M2 AAG à l'Université Paris-Sud, à Orsay), C. Lemonnier (Professeure agrégée au Lycée Napoléon, à L'Aigle), P. Vernier (Professeur de maths au Lycée René Cassin, à Arpajon), C. Palamidessi (Directrice de recherches INRIA à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau).

Solution du problème 7 : Montrons qu'après un certain temps toutes les paires de marques jaunes seront séparées par au moins une marque blanche. En argumentant par contradiction, si une paire de marques jaunes n'est jamais séparée par une marque blanche, c'est que Rémi ajoute à chaque tour de piste une marque blanche juste avant et juste après cette paire de marques jaunes. Par conséquent, lorsque Rémi court entre ces deux marques jaunes, le nombre k de marques sur le circuit est pair. En faisant un tour complet, il rencontre donc $k/2$ paires de marques et ajoute $k/2$ marques blanches. Après ce tour, il y a donc $k + k/2 = \frac{3}{2}k$ marques sur le circuit. En répétant ce raisonnement, après n tours complets, il y aura $(\frac{3}{2})^n k$ marques sur le circuit. Mais il est impossible que ce nombre reste pair (ou même entier) pour tout n, ce qui donne la contradiction souhaitée.

Ont fourni une solution correcte : M. Billon (1ère S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Fourré (1ère S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Corbineau (Tle S au Lycée Saint-Charles, à Athis-Mons), M. Delmas (L1 DL math info à l'Université Paris-Sud, à Orsay), N. Tokka (L3 MFA à l'Université Paris-Sud, à Orsay), C. Boricaud (M2 agrégation à l'Université Paris-Sud, à Orsay), D. Girault (M2 AAG à l'Université Paris-Sud, à Orsay), D. Albertin (doctorant au LIGM de l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée, à Champs-sur-Marne), C. Lemonnier (Professeure agrégée au Lycée Napoléon, à L'Aigle), P. Vernier (Professeur de maths au Lycée René Cassin, à Arpajon), C. Palamidessi (Directrice de recherches INRIA à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau).

Solution du problème 8 : Considérons d'abord les napperons qui recouvrent un morceau de longueur strictement positive du bord de la table. Le plus long arc de cercle du bord de la table pouvant être couvert par un tel napperon est limité par des points séparés par une distance égale au diamètre 1 du napperon. Cet arc de cercle correspond à exactement $\frac{1}{6}$ de la circonférence de la table (on peut voir cela en y inscrivant un hexagone régulier), de sorte qu'il faut au moins 6 napperons pour couvrir le bord de la table. Le centre de la table ne peut être couvert par ces napperons, puisque celui-ci est à une distance égale à un diamètre de napperon du bord de la table. Il faut donc au moins 7 napperons pour couvrir toute la table.
Inversement, 7 napperons suffisent à Julie pour couvrir la table en plaçant les centres de 6 napperons sur les milieux des côtés d'un hexagone régulier inscrit dans le bord de la table, afin d'en couvrir tout le bord, puis en plaçant un 7ème napperon au centre de la table. Ceci suffit à recouvrir toute la table, que l'on peut diviser en 6 secteurs angulaires de même taille. Chaque secteur angulaire est l'union d'un triangle équilatéral de côté 1 et d'un croissant de lune. Le triangle équilatéral se décompose en 4 triangles équilatéraux de côté $\frac{1}{2}$ en joignant les milieux des côtés du grand triangle. Chacun des 6 napperons sur le pourtour de la table recouvre, pour l'un des secteurs angulaires, le croissant de lune et les 3 petits triangles équilatéraux les plus éloignés du centre de la table. Le 7ème napperon couvre, pour tous les secteurs angulaires, le 4ème petit triangle équilatéral adjacent au centre de la table.
Plusieurs participants ont correctement deviné le nombre minimal de napperons à utiliser, mais n'ont pas justifié l'optimalité de leur réponse.

Ont fourni une solution correcte : M. Billon (1ère S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Fourré (1ère S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), S. Meziane (1ère SMP au Lycée Franco-Allemand, à Buc), L. Champignon (Tle S au Lycée Jean Vilar, à Plaisir), D. Girault (M2 AAG à l'Université Paris-Sud, à Orsay), M. Farid (Consultant chez Awalee Consulting, à Paris), C. Lemonnier (Professeure agrégée au Lycée Napoléon, à L'Aigle), P. Vernier (Professeur de maths au Lycée René Cassin, à Arpajon), H. Jallouli (Analyste quantitatif à la Deutsche Bank), C. Palamidessi (Directrice de recherches INRIA à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau).