

MARATHON D'ORSAY DE MATHÉMATIQUES

Résultats de la deuxième vague de novembre 2020

Voici les solutions de la deuxième vague de problèmes avec les noms des participants qui ont fourni une solution correcte.

Solution du problème 5 : Considérons les suites choisies par Marie et contenant l'entier 4. Etudions d'abord le cas où les entiers 6, 7 et 8 ne sont pas contenus dans ces suites. Il n'y a alors qu'au plus deux suites pouvant contenir ces trois entiers, de sorte que deux de ces entiers sont dans une même suite. Si il s'agit de 6 et 7, ou bien de 7 et 8, cette suite est de raison 1 et contient tous les entiers ≥ 7 , en particulier 2020. Si il s'agit de 6 et 8, cette suite contient tous les entiers pairs ≥ 6 , en particulier 2020. Regardons maintenant le cas où au moins l'un de ces entiers 6, 7 et 8 est contenu dans l'une des suites de Marie contenant aussi l'entier 4. Dans ce cas, la raison de cette suite est ≤ 4 . Si cette raison est 1, la suite contient tous les entiers ≥ 4 , en particulier 2020. Si c'est 2 ou 4, la suite contient tous les entiers positifs et multiples de 4, en particulier 2020. Si c'est 3, la suite contient tous les entiers de la forme $3k + 1$, avec k un entier > 0 , en particulier 2020. Dans tous les cas, on voit que 2020 fait nécessairement partie de l'une des suites choisies par Marie.

Ont fourni une solution correcte : A. Bouton (3ème au Collège Le Parc, à Saint-Maur-des-Fossés), A.-P. Poudade (2nde au Lycée Louis-le-Grand, à Paris), A. Crovisier (1ère au Lycée Lakanal, à Sceaux), M. Krishnan (1ère à l'École Jeannine Manuel, à Paris), A. Le Helloco (1ère au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), O. Lemoine (1ère au Lycée Marguerite Yourcenar, à Morangis), C. Regnier (1ère à l'Institut Montalembert, à Nogent-sur-Marne), M. Billon (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), C. Boden (Tle au Lycée Saint Jean Hulst, à Versailles), C. Bourotte (Tle au Lycée La Trinité, à Neuilly-sur-Seine), E. Bruneton (Tle au Lycée Sainte Elisabeth, à Paris), M. Camus (Tle au Lycée Louis-le-Grand, à Paris), R. Clément (Tle au Lycée Fénelon, à Paris), V. Defransure (Tle au Lycée Sophie Barat, à Châtenay-Malabry), D.-R. Demir (Tle au Lycée Saint-Louis Saint-Clément, à Viry-Châtillon), E. Ehrhart (Tle au Lycée Saint-François d'Assise, à Montigny-le-Bretonneux), O. Feuilland (Tle au Lycée Léonard de Vinci, à Levallois-Perret), P. Fritsch (Tle au Lycée Hélène Boucher, à Paris), A. Gruchy (Tle au Lycée Fénelon, à Paris), C. Huang (Tle au Lycée international de l'est parisien, à Aubervilliers), F. Kovarik (Tle au Lycée Saint Jean Hulst, à Versailles), F. Le Febvre de Nailly (Tle au Lycée Sainte-Ursule, à Paris), J. Legrand (Tle au Lycée Descartes, à Montigny-le-Bretonneux), V. Llorca (Tle au Lycée Louis de Broglie, à Marly-le-Roi), A. Miller (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), G. Mushyata Kibulu (Tle au Lycée Saint Martin de France, à Pontoise), L. Neveux (Tle à l'Institut de La Tour, à Paris), J. Ramat (Tle au Lycée Saint-Louis Saint-Clément, à Viry-Châtillon), C. Spittael (Tle au Lycée Saint-François d'Assise, à Montigny-le-Bretonneux), S. Tsang (Tle au Lycée Racine, à Paris), P. Varnet (Tle au Lycée Henry-IV, à Paris), S. Meziane (Tle SMP au Lycée Franco-Allemand, à Buc), H. Chalandon (Tle intégrée à l'IPESUP, à Paris), A. Corbineau (MPSI au Lycée Louis-le-Grand, à Paris), Y. Dillies (1ère Bachelor à Cambridge University, à Cambridge), M. Baccara (MP au Lycée Jean-Baptiste Corot, à Savigny-sur-Orge), J. de Sainte Marie (MP au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), N. Déhais (MP* au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), E. Benyahia (1ère à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), L. Rolland (1ère à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), R. Terrine (1ère année à l'ENSTA Paris, à

Palaiseau), E. Le Pogam (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), K. Lebreton (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), J. Malartre (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), D. Perrot (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), A. Bouzidi (L3 math à Sorbonne Université, à Paris), J.-L. Fatras (L3 math à Sorbonne Université, à Paris), A. Eljandoubi (2ème math app à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), A. Kirchmeyer (2ème année à l'École Polytechnique, à Palaiseau), I. Tauil (2ème à l'École Polytechnique, à Palaiseau), C. Vauthier (M1 à l'ENS, à Paris), P. Drouvillé (M1 Hadamard à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette), A. Zidani (M1 Hadamard à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), D. Damian (M1 math et appl à Sorbonne Université, à Paris), M.-S. Chen (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris), M. Gauvrit (M1 maths à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette), T.-T. Nghiem (M2 AAG à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), V. Aubry (M2 agrégation à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette), D. Girault (M2 agrégation à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), T. Lenoir (M2 agrégation à l'ENS et ENS Paris-Saclay, à Paris et Gif-sur-Yvette), M. A. Ben Ghaleb (M2 optimisation à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), E. Monard (3ème au CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette), P.-A. Monard (4ème et M2 agreg à l'ENS et ENS Paris-Saclay, à Paris et Gif-sur-Yvette), O. Collin (Césure M2-thèse à l'ENS, à Paris), J. Muller (doctorant au LAGA - Institut Galilée de l'Université Sorbonne Paris Nord, à Villetaneuse), G. Soudais (doctorant au Telecom Paris et Bell Labs, à Palaiseau et Nozay), H.-Q. Tran (doctorant à l'Université Paris Dauphine, à Paris), C. Moulin (doctorante au LRI, Université Paris-Saclay, à Orsay), H. Jallouli (Analyste Quantitatif au Deutsche Bank, à Londres), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, ENS de Lyon, à Lyon), C. Palamidessi (Chercheuse à l'INRIA Saclay, à Palaiseau), M. Farid (Consultant à l'Awalee Consulting, à Paris), B. Berached (Ingénieur informaticien, à Massy), C. Romon (Secrétaire Général de la MIQCP, à La Défense), D. Collignon (Attaché statisticien pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), C. Lemonnier (Prof de maths au Lycée Napoléon, à L'Aigle), M. Tastet (Prof de maths au Lycée Condorcet, à Paris).

Solution du problème 6 : Montrons que les droites AM et BC sont parallèles, de sorte que l'aire du triangle MBC reste égale à celle du triangle ABC (et en particulier maximale) quelle que soit la position du point D dans le segment $[B, C]$. L'angle $\widehat{BDB'}$ est droit, car les points B, D et B' sont sur le cercle circonscrit à ABD dont BB' est un diamètre. De même, l'angle $\widehat{CDC'}$ est droit. Par conséquent, les points B', C' et D sont alignés, et les droites BC et $B'C'$ sont orthogonales. D'autre part, comme les points A, B, D et B' sont sur un même cercle, les angles \widehat{ABD} et $\widehat{AB'D}$ sont égaux ou supplémentaires. De même, les angles \widehat{ACD} et $\widehat{AC'D}$ sont égaux ou supplémentaires. Comme le triangle ABC est supposé isocèle, les angles \widehat{ABD} et \widehat{ACD} sont égaux, de sorte que $\widehat{AB'D}$ et $\widehat{AC'D}$ sont égaux ou supplémentaires : le triangle $AB'C'$ est isocèle. Par conséquent, AM est l'axe de symétrie de ce triangle, et les droites AM et $B'C'$ sont orthogonales. Comme nous avons déjà montré que $B'C'$ et BC sont orthogonales, cela implique le parallélisme de AM et BC souhaité.

Ont fourni une solution correcte : A. Bouton (3ème au Collège Le Parc, à Saint-Maur-des-Fossés), M. Krishnan (1ère à l'École Jeannine Manuel, à Paris), A. Le Helloco (1ère au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), O. Lemoine (1ère au Lycée Marguerite Yourcenar, à Morangis), M. Billon (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), C. Bourotte (Tle au Lycée La Trinité, à Neuilly-sur-Seine), M. Camus (Tle au Lycée Louis-le-Grand, à Paris), V. Defransure (Tle au Lycée Sophie Barat, à Châtenay-Malabry), E. Ehrhart (Tle au Lycée Saint-François d'Assise, à Montigny-le-Bretonneux), P. Fritsch (Tle au Lycée Hélène Boucher, à Paris), A. Jiao (Tle à l'Institut Notre-Dame, à Meudon), J. Legrand (Tle au Lycée Descartes, à Montigny-le-Bretonneux), A. Miller (Tle au Lycée Franco-Allemand,

à Buc), G. Mushiata Kibulu (Tle au Lycée Saint Martin de France , à Pontoise), L. Polderman (Tle au Lycée Saint Jean Hulst, à Versailles), C. Spittaël (Tle au Lycée Saint-François d'Assise, à Montigny-le-Bretonneux), A. Thuillier (Tle au Lycée Saint-François d'Assise, à Montigny-le-Bretonneux), A. Fourré (Tle S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), S. Meziane (Tle SMP au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Corbineau (MPSI au Lycée Louis-le-Grand, à Paris), Y. Dillies (1ère Bachelor à Cambridge University, à Cambridge), J. de Sainte Marie (MP au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), N. Déhais (MP* au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), K. Lebreton (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), D. Perrot (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), A. Bouzidi (L3 math à Sorbonne Université, à Paris), E. Benyahia (1ère à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), L. Rolland (1ère à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), C. Vauthier (M1 à l'ENS, à Paris), P. Drouvillé (M1 Hadamard à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette), A. Zidani (M1 Hadamard à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), D. Damian (M1 math et appl à Sorbonne Université, à Paris), M.-S. Chen (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris), M. Gauvrit (M1 maths à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette), A. Eljandoubi (2ème math app à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), T.-T. Nghiem (M2 AAG à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), V. Aubry (M2 agrégation à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette), D. Girault (M2 agrégation à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), T. Lenoir (M2 agrégation à l'ENS et ENS Paris-Saclay, à Paris et Gif-sur-Yvette), M. A. Ben Ghaleb (M2 optimisation à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), E. Monard (3ème au CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette), P.-A. Monard (4ème et M2 agreg à l'ENS et ENS Paris-Saclay, à Paris et Gif-sur-Yvette), J. Muller (doctorant au LAGA - Institut Galilée de l'Université Sorbonne Paris Nord, à Villetaneuse), H.-Q. Tran (doctorant à l'Université Paris Dauphine, à Paris), C. Moulin (doctorante au LRI, Université Paris-Saclay, à Orsay), H. Jallouli (Analyste Quantitatif à la Deutsche Bank, à Londres), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, ENS de Lyon, à Lyon), C. Palamidessi (Chercheuse à l'INRIA Saclay, à Palaiseau), M. Farid (Consultant à l'Awalee Consulting, à Paris), C. Romon (Secrétaire Général de la MIQCP, à La Défense), D. Collignon (Attaché statisticien pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), M.-Y. Gueddari (Stagiaire à l'Institut Louis Bachelier DataLab).

Solution du problème 7 : Notons $p(n)$ la probabilité recherchée et montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que $p(n) = \frac{n}{2n+1}$. Lorsque $n = 1$, la probabilité recherchée est celle que le seul joueur gagne à son jeu, c'est-à-dire $\frac{1}{3}$. Le résultat $p(1) = \frac{1}{3}$ est bien compatible avec la formule annoncée. Supposons maintenant que $p(n) = \frac{n}{2n+1}$ et calculons $p(n+1)$. Le nombre d'amis parmi $n+1$ remportant la victoire est impair si et seulement si, soit le nombre de vainqueurs parmi les n premiers amis est impair et le $(n+1)$ ème ami perd, soit le nombre de vainqueurs parmi les n premiers amis est pair et le $(n+1)$ ème ami gagne. On obtient donc $p(n+1) = p(n)(1 - \frac{1}{2n+3}) + (1 - p(n))\frac{1}{2n+3}$. En remplaçant $p(n)$ par $\frac{n}{2n+1}$ et en simplifiant, on obtient la formule $p(n+1) = \frac{n+1}{2(n+1)+1}$ désirée.

Ont fourni une solution correcte : A. Bouton (3ème au Collège Le Parc, à Saint-Maur-des-Fossés), P. Guichon (1ère au Lycée Sainte Thérèse, à Ozoir-la-Ferrière), M. Krishnan (1ère à l'Ecole Jeannine Manuel, à Paris), A. Le Helloco (1ère au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), M. Billon (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), M. Camus (Tle au Lycée Louis-le-Grand, à Paris), E. Ehrhart (Tle au Lycée Saint-François d'Assise, à Montigny-le-Bretonneux), P. Fritsch (Tle au Lycée Hélène Boucher, à Paris), A. Miller (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), G. Mushiata Kibulu (Tle au Lycée Saint Martin de France , à Pontoise), J. Ramat (Tle au Lycée Saint-Louis Saint-Clément, à Viry-Châtillon), C. Spittaël (Tle au Lycée Saint-François d'Assise, à Montigny-le-Bretonneux), A. Thuillier (Tle au Lycée Saint-François d'Assise, à Montigny-le-Bretonneux), P. Varnet (Tle au Lycée Henry-IV, à Paris), A. Fourré (Tle S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), S. Meziane (Tle SMP au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Corbineau (MPSI au Lycée Louis-le-Grand,

à Paris), Y. Dillies (1ère Bachelor à Cambridge University, à Cambridge), M. Baccara (MP au Lycée Jean-Baptiste Corot, à Savigny-sur-Orge), N. Déhais (MP* au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), E. Benyahia (1ère à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), L. Rolland (1ère à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), R. Terrine (1ère année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), K. Lebreton (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), J. Malartre (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), D. Perrot (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), A. Yax (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), A. Bouzidi (L3 math à Sorbonne Université, à Paris), A. Kirchmeyer (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), C. Vauthier (M1 à l'ENS, à Paris), P. Drouvillé (M1 Hadamard à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette), A. Zidani (M1 Hadamard à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), M.-S. Chen (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris), M. Gauvrit (M1 maths à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette), A. Eljandoubi (2ème math app à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), I. Tauil (2ème à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), V. Aubry (M2 agrégation à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette), D. Girault (M2 agrégation à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), T. Lenoir (M2 agrégation à l'ENS et ENS Paris-Saclay, à Paris et Gif-sur-Yvette), M. A. Ben Ghaleb (M2 optimisation à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), E. Monard (3ème au CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette), P.-A. Monard (4ème et M2 agreg à l'ENS et ENS Paris-Saclay, à Paris et Gif-sur-Yvette), O. Collin (Césure M2-thèse à l'ENS, à Paris), J. Muller (doctorant au LAGA - Institut Galilée de l'Université Sorbonne Paris Nord, à Villetaneuse), G. Soudais (doctorant à Telecom Paris et Bell Labs, à Palaiseau et Nozay), H.-Q. Tran (doctorant à l'Université Paris Dauphine, à Paris), H. Jallouli (Analyste Quantitatif à la Deutsche Bank, à Londres), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, ENS de Lyon, à Lyon), C. Palamidessi (Chercheuse à l'INRIA Saclay, à Palaiseau), M. Farid (Consultant à l'Awalee Consulting, à Paris), C. Romon (Secrétaire Général de la MIQCP, à La Défense), D. Collignon (Attaché statisticien pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), P. Vernier (Prof de maths au Lycée René Cassin, à Arpajon), M.-Y. Gueddari (Stagiaire à l'Institut Louis Bachelier DataLab).

Solution du problème 8 : Montrons que le triangle rectangle T dont les côtés de l'angle droit ont pour longueur 1 et $\sqrt{3}$ fait l'affaire. Considérons un triangle équilatéral ayant des côtés de longueur 2. Au moins deux de ses sommets sont de même couleur, appelons-les A_1 et A_4 . Traçons l'hexagone régulier $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ inscrit dans le cercle de diamètre A_1A_4 . Remarquons que les triangles $A_1A_4A_2$, $A_1A_4A_3$ et $A_1A_4A_5$ sont isométriques à T . Si l'un d'entre eux est monochrome, nous avons trouvé T' . Dans le cas contraire, les sommets A_2 , A_3 et A_5 ont une couleur différente que A_1 et A_4 . Mais alors le triangle $A_2A_3A_5$, qui est lui aussi isométrique à T , a tous ses sommets de même couleur. Dans tous les cas, nous avons trouvé un triangle T' qui convient.

La grande majorité des participants a utilisé ce triangle pour résoudre ce problème. Quelques autres ont eu recours au triangle $B_1B_2B_4$ tracé dans un heptagone régulier $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$. Un participant a judicieusement noté qu'un triangle équilatéral ne peut pas faire l'affaire, mais aucun autre type de triangle n'a été discuté dans les solutions que nous avons reçues ; avis aux amateurs !

Ont fourni une solution correcte : A. Le Helloco (1ère au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), M. Billon (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), C. Bourotte (Tle au Lycée La Trinité, à Neuilly-sur-Seine), P. Fritsch (Tle au Lycée Hélène Boucher, à Paris), A. Miller (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), P. Varnet (Tle au Lycée Henry-IV, à Paris), A. Fourré (Tle S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), S. Meziane (Tle SMP au Lycée Franco-Allemand, à Buc), N. Déhais (MP* au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), A. Bouzidi (L3 math à Sorbonne Université, à Paris), K. Lebreton (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), D. Perrot (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), C. Vauthier (M1 à l'ENS, à Paris), P. Drouvillé (M1 Hadamard à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette),

M.-S. Chen (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris), M. Gauvrit (M1 maths à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette), V. Aubry (M2 agrégation à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette), T. Lenoir (M2 agrégation à l'ENS et ENS Paris-Saclay, à Paris et Gif-sur-Yvette), M. A. Ben Ghaleb (M2 optimisation à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), E. Monard (3ème au CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette), P.-A. Monard (4ème et M2 agreg à l'ENS et ENS Paris-Saclay, à Paris et Gif-sur-Yvette), O. Collin (Césure M2-thèse à l'ENS, à Paris), J. Muller (doctorant au LAGA - Institut Galilée de l'Université Sorbonne Paris Nord, à Villetaneuse), H.-Q. Tran (doctorant à l'Université Paris Dauphine, à Paris), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, ENS de Lyon, à Lyon), C. Palamidessi (Chercheuse à l'INRIA Saclay, à Palaiseau), C. Romon (Secrétaire Général de la MIQCP, à La Défense), D. Collignon (Attaché statisticien pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), P. Vernier (Prof de maths au Lycée René Cassin, à Arpajon), M.-Y. Gueddari (Stagiaire à l'Institut Louis Bachelier DataLab).