

## MARATHON D'ORSAY DE MATHÉMATIQUES

Novembre 2021

Voici les énoncés de la deuxième vague de problèmes, dont les solutions sont attendues au plus tard le **lundi 6 décembre 2021 à 14h**. Celles-ci peuvent être envoyées par email à [marathon.math@universite-paris-saclay.fr](mailto:marathon.math@universite-paris-saclay.fr), par la poste (voir l'adresse sur <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/marathon>), ou déposées dans une boîte en carton prévue à cet effet au rez-de-chaussée du bâtiment 307, dans la salle des casiers à courrier située à droite du grand hall, juste après avoir franchi l'entrée principale.

Nous vous rappelons que pour que vos solutions puissent être considérées comme correctes, il est indispensable que vous justifiez très soigneusement vos réponses, comme dans une démonstration. Si vous répondez à plusieurs problèmes, il vous est demandé de le faire sur des feuilles séparées. Merci d'indiquer clairement votre nom, prénom, année d'études (ou statut), établissement, ville de cet établissement et adresse email.

### Problème 5 (semi et complet)

Jasmine, qui s'ennuie énormément en attendant la deuxième vague de problèmes du Marathon d'Orsay de Mathématiques, a écrit sur un tableau noir tous les nombres entiers de 1 à 2021. Elle s'amuse ensuite à répéter autant que possible l'opération suivante : choisir deux nombres  $x$  et  $y$  sur le tableau, les effacer, puis écrire la valeur absolue  $|x - y|$  de leur différence. Ainsi, après 2020 telles opérations, il ne reste plus qu'un seul nombre écrit sur le tableau. Quelles sont toutes les valeurs que Jasmine peut obtenir pour ce dernier nombre ?

### Problème 6 (semi et complet)

Aurélie a soigneusement tracé un quadrilatère  $ABCD$  inscrit dans un cercle  $\mathcal{C}$ , tel que les demi-droites  $AD$  et  $BC$  se coupent en un point  $K$  et que les demi-droites  $AB$  et  $DC$  se coupent en un point  $L$ . Elle a également tracé le cercle  $\mathcal{C}_1$  circonscrit au triangle  $AKL$  et le cercle  $\mathcal{C}_2$  circonscrit au triangle  $CKL$ . Est-il possible que les cercles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}_1$  soient tangents au point  $A$ , tandis que les cercles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}_2$  se coupent en deux points distincts ?

### Problème 007 (complet)

Chaque membre d'une terrible organisation criminelle est identifié de manière unique par une (et une seule) liste non ordonnée de 1 à 7 symboles distincts parmi ceux figurant dans le sigle SPECTRE. Au cours de sa dernière mission, Nomi a appris que pour tout choix de  $N$  symboles avec  $1 \leq N \leq 6$ , le nombre de membres dont l'identifiant contient au moins l'un de ces  $N$  symboles est pair. Combien de membres peut compter cette organisation criminelle ?

## Problème 8 (complet)

Il est de coutume de dire que deux mathématiciens sont co-auteurs (ou que l'un est co-auteur de l'autre) si ils ont démontré ensemble un nouveau théorème. Dans une conférence qui a récemment eu lieu au Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, pour toute paire de participants  $A$  et  $B$  il y a exactement un autre participant  $C$  qui est à la fois co-auteur de  $A$  et de  $B$ . Peut-on nécessairement trouver un participant de cette conférence qui soit co-auteur de tous les autres participants ?