

MARATHON D'ORSAY DE MATHÉMATIQUES

Novembre 2022

Voici les énoncés de la deuxième vague de problèmes, dont les solutions sont attendues au plus tard le **lundi 5 décembre 2022 à 14h**. Celles-ci peuvent être envoyées par email à marathon.math@universite-paris-saclay.fr, par la poste (voir l'adresse sur <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/marathon>), ou déposées dans une boîte en carton prévue à cet effet au rez-de-chaussée du bâtiment 307, dans la salle des casiers à courrier située à droite du grand hall, juste après avoir franchi l'entrée principale.

Nous vous rappelons que pour que vos solutions puissent être considérées comme correctes, il est indispensable que vous justifiez très soigneusement vos réponses, comme dans une démonstration. Si vous répondez à plusieurs problèmes, il vous est demandé de le faire sur des feuilles séparées. Merci d'indiquer clairement votre nom, prénom, année d'études (ou statut), établissement, ville de cet établissement et adresse email.

Problème 5 (semi et complet)

Dans un banquet, 16 convives sont installés autour d'une table ronde. Le cuisinier Marc souhaite ajouter sur la table des décorations assez volumineuses, de sorte qu'elles devraient idéalement être installées en face d'un convive sur deux. Mais il ne lui reste plus que 6 décorations. De combien de manières différentes Marc peut-il choisir 6 convives devant lesquels placer les décorations, de sorte qu'aucun convive choisi ne soit directement adjacent à un autre convive choisi ?

Problème 6 (semi et complet)

Julie trace un quadrilatère $ABCD$ inscrit dans un cercle de centre O . Elle construit le symétrique A' du point A par rapport à la bissectrice de l'angle \widehat{CBD} . Elle construit aussi le symétrique B' du point B par rapport à la bissectrice de l'angle \widehat{CAD} . Comme Julie s'est arrangée pour que les points A , B et O ne soient pas alignés, les droites $A'B$ et AB' se coupent en un point qu'elle appelle E . Aidez Julie à démontrer que les droites OE et CD se coupent perpendiculairement.

Problème 7 (complet)

Un professeur d'école élémentaire organise un tournoi de calcul mental pour les 24 élèves de sa classe. Chaque paire d'élèves s'affronte une fois dans un duel, qui peut se terminer par la victoire de l'un des élèves ou par un match nul. Le professeur attribue à chaque élève un point pour une victoire, un demi-point pour un match nul et aucun point pour une défaite. A la fin du tournoi, il classe ses élèves dans l'ordre décroissant du nombre total de points obtenus. Il se contente d'annoncer à la directrice de l'école que tous les élèves ont obtenu un nombre différent de points, et que les 5 premiers élèves du classement ont obtenu ensemble autant de points que les 15 derniers élèves du classement. D'après la directrice, combien de duels au maximum ont pu se terminer par un match nul durant ce tournoi ?

Problème 8 (complet)

Quels sont tous les nombres premiers p et toutes les paires (a, b) d'entiers strictement positifs tels que $p^{a+1} + 9^b$ est un carré parfait ?