

MARATHON D'ORSAY DE MATHÉMATIQUES

Résultats de la deuxième vague de novembre 2022

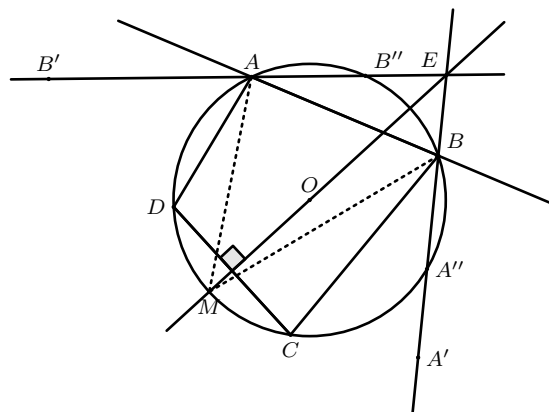
Voici les solutions de la deuxième vague de problèmes, avec les noms des participants qui ont fourni une solution correcte.

Solution du problème 5 : Numérotions les convives de 1 à 16 en faisant le tour de la table. Commençons par compter les choix admissibles de 6 convives qui comprennent le convive 1. Les 5 autres doivent donc être choisis parmi la rangée des 13 convives 3 à 15 sans choisir de convives voisins. Faire un tel choix revient à insérer 5 convives choisis dans une rangée de $13 - 5$ convives non choisis, soit en début de rangée, soit entre deux convives ou encore en fin de rangée. Ceci correspond à $13 - 5 + 1$ sites d'insertion possibles, et on ne peut insérer deux convives choisis au même site d'insertion. Cela revient à choisir 5 sites d'insertion parmi $13 - 5 + 1$, et il y a $\binom{13-5+1}{5} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 126$ manières de faire cela. Comptons maintenant les choix admissibles de 6 convives qui ne comprennent pas le convive 1. Les 6 convives doivent donc être choisis parmi la rangée des 15 convives 2 à 16. Par le même raisonnement que ci-dessus, il y a $\binom{15-6+1}{6} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} = 210$ tels choix. Au total, on obtient $126 + 210 = 336$ manières de choisir les 6 convives de manière admissible.

Ont fourni une solution correcte : A. Tarassov (4ème au Collège Notre Dame les Oiseaux, à Verneuil sur Seine), R. Crovisier (2nde au Lycée Lakanal, à Sceaux), N. Seillan (2nde au Lycée Hoche, à Versailles), C. Cheroux-Aymard (1ère au Lycée Bossuet-Notre-Dame, à Paris), B. Guinard (1ère au Lycée N'R Hatorah, à Paris), P. Laurent-Levinson (1ère au Lycée Ecole Alsacienne, à Paris), H. Bekrar (Tle au Lycée Sévigné, à Cesson-Sévigné), T. Durain (Tle au Lycée Paul Doumer, à Perreux sur Marne), P. Duvivier (Tle au Lycée René Cassin, à Arpajon), C. Hebey (Tle au Lycée Charlemagne, à Paris), J. Hoarau (Tle au Lycée Sonia Delaunay, à Villepreux), V. Meslon (Tle au Lycée Madeleine Daniélou, à Rueil-Malmaison), K. Ricard (Tle au Lycée Français Alexandre Yersin, à Hanoi, Vietnam), G. A. Uzunov (Tle au Lycée La Salle-Passy Buzenval, à Rueil-Malmaison), E. Vandenbroucke (Tle au Lycée Fénelon, à Grasse), S. Gvozdić (LDD2 Informatique - Mathématiques à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), M. Yadollahi (LDD2 math-physique à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), M. Corlay (1ère année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), N. Déhais (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), G. Faes (1ère année à l'École Polytechnique, à Palaiseau), N. Llorens (1ère année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), N. Tardy (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), Z. Yao (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), N. Gonde (2ème année BCPST au Lycée Saint-Louis, à Paris), E. Fagnou (M2 à Télécom Paris, à Palaiseau), C. Metz (doctorant à l'Université Paris-Saclay, à Orsay et au CEA, à Palaiseau), J. Muller (doctorant à l'Institut Galilée, à l'Université Sorbonne Paris Nord, à Villetaneuse), D. Collignon (attaché statisticien hors classe au département informatique et télécommunications pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), N. Didrit (professeur de mathématiques et informatique au Lycée La Salle-Passy Buzenval, à Rueil-Malmaison), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon), C. Lemonnier (professeure de mathématiques au Collège Yves Montand, à Val-au-Perche), J. Moreno (professeur de mathématiques au Lycée Nikola Tesla, à Dourdan), H. N. Nguyen (analyste quantitatif, à Paris), T. Ravary (enseignant au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau), C. Romon (secrétaire général de

la Mission interministérielle pour la qualité des constructions publiques, à La Défense), l'équipe formée par N. Desurmont (3ème au Lycée Franco-Allemand, à Buc) et M. Israel (3ème au Lycée Franco-Allemand, à Buc), l'équipe formée par P. Codron (2nde à l'Ecole Jeannine Manuel, à Paris) et T. Ravel (2nde à l'Ecole Jeannine Manuel, à Paris), l'équipe formée par D. M. Dang (1ère à l'Ecole Jeannine Manuel, à Paris), J. Stefani (1ère à l'Ecole Jeannine Manuel, à Paris) et L. Valex (1ère à l'Ecole Jeannine Manuel, à Paris), l'équipe formée par N. Ismaïli Erny (1ère au Lycée International des Pontonniers, à Strasbourg) et A. Zhang (Tle au Lycée le Gymnase Jean Sturm, à Strasbourg), l'équipe formée par C. Cedillo-Vayson de Pradenne (Tle au Lycée Jean de la Fontaine, à Paris) et A. Lemarié (Tle au Lycée Jean de la Fontaine, à Paris), l'équipe formée par L. Louineau (Tle au Lycée Condorcet, à Paris) et N. Queijo (Tle au Lycée Condorcet, à Paris), l'équipe formée par A. de Lamberteri (Tle au Lycée Charles Péguy, à Paris) et J. Xue (Tle au Lycée Charles Péguy, à Paris), l'équipe formée par I. Israël (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Perdriaud (LDD1 info-math à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et T. Saïdi-Pankow (Tle au Lycée Jean-Pierre Vernant, à Sèvres), l'équipe formée par S. Bakayoko (1ère Master ingénieur civil à l'Ecole Royale Militaire, à Bruxelles) et N. E. Polneau (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), l'équipe formée par J. Clement-Cottuz (M1 mathématiques appliquées à l'Université Grenoble Alpes, à Grenoble) et L. Vanhaelewyn (L3 à l'ENS, à Paris), l'équipe formée par S. Buchet (M1 MEEF maths à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et C. Lucas (M1 MEEF maths à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), l'équipe formée par M. Baccara (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris, M1 à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, à Paris), S. Baumert (césure, à Paris) et P. Boureau (M1 à l'ENS, à Paris), l'équipe formée par E. Monard (4ème année à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette) et P.-A. Monard (diplômé de l'ENS, à Issy-les-Moulineaux).

Solution du problème 6 : Appelons \mathcal{C} le cercle de centre O dans lequel est inscrit le quadrilatère $ABCD$. Soit M le milieu de l'arc de \mathcal{C} limité par C et D et ne comprenant pas les points A et B . Par le théorème de l'angle au centre, la bissectrice de \widehat{CAD} est la droite AM , la bissectrice de \widehat{CBD} est la droite BM et la médiatrice du segment CD est la droite OM . Soit A'' le deuxième point d'intersection de la droite $A'B$ avec \mathcal{C} , et soit B'' le deuxième point d'intersection de la droite AB' avec \mathcal{C} . Par définition de B' , AM est la bissectrice de l'angle formé par les droites AB et $AB' = AB''$, de sorte que M est le milieu de l'arc de \mathcal{C} limité par B et B'' . De même, M est le milieu de l'arc de \mathcal{C} limité par A et A'' . Ainsi, la droite OM est la médiatrice des segments AA'' et BB'' . Ceci implique que les droites $AB'' = AB'$ et $A''B = A'B$ sont images par la symétrie orthogonale d'axe OM . Leur point d'intersection E est donc sur cet axe, de sorte que $OE = OM$ est perpendiculaire à CD .



Ont fourni une solution correcte : N. Seillan (2nde au Lycée Hoche, à Versailles),

M. Domergue (1ère au Lycée Vaugelas, à Chambéry), A. Khechine (1ère au Lycée Languevin Wallon, à Champigny sur Marne), P. Laurent-Levinson (1ère au Lycée Ecole Alsacienne, à Paris), C. Hebey (Tle au Lycée Charlemagne, à Paris), K. Ricard (Tle au Lycée Français Alexandre Yersin, à Hanoi, Vietnam), S. Gvozdić (LDD2 Informatique - Mathématiques à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), M. Yadollahi (LDD2 math-physique à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), M. Corlay (1ère année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), Q. Hurez (1ère année à l'ENS, à Paris), Y. Loesch (1ère année à Télécom SudParis, à Evry), Z. Yao (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), E. Fagnou (M2 à Télécom Paris, à Palaiseau), C. Metz (doctorant à l'Université Paris-Saclay, à Orsay et au CEA, à Palaiseau), D. Collignon (attaché statisticien hors classe au département informatique et télécommunications pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), N. Didrit (professeur de mathématiques et informatique au Lycée La Salle-Passy Buzenval, à Rueil-Malmaison), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon), H. N. Nguyen (analyste quantitatif, à Paris), T. Ravary (enseignant au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau), C. Romon (secrétaire général de la Mission interministérielle pour la qualité des constructions publiques, à La Défense), l'équipe formée par N. Desurmont (3ème au Lycée Franco-Allemand, à Buc) et M. Israel (3ème au Lycée Franco-Allemand, à Buc), l'équipe formée par S. Benoit (1ère au Lycée Stanislas, à Paris) et J. Bula (1ère au Lycée Stanislas, à Paris), l'équipe formée par N. Ismaïli Erny (1ère au Lycée International des Pontonniers, à Strasbourg) et A. Zhang (Tle au Lycée le Gymnase Jean Sturm, à Strasbourg), l'équipe formée par L. Bouley (Tle au Cours Secondaire d'Orsay, à Orsay), J. Monteilhet (Tle au Lycée du Sacré Cœur, à La Ville du Bois) et A. Waldek (Tle au Lycée du Sacré Cœur, à La Ville du Bois), l'équipe formée par C. Cedillo-Vayson de Pradenne (Tle au Lycée Jean de la Fontaine, à Paris) et A. Lemarié (Tle au Lycée Jean de la Fontaine, à Paris), l'équipe formée par A. de Lamberteri (Tle au Lycée Charles Péguy, à Paris) et J. Xue (Tle au Lycée Charles Péguy, à Paris), l'équipe formée par I. Israël (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Perdriaud (LDD1 info-math à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et T. Saïdi-Pankow (Tle au Lycée Jean-Pierre Vernant, à Sèvres), l'équipe formée par S. Bakayoko (1ère Master ingénieur civil à l'Ecole Royale Militaire, à Bruxelles) et N. E. Polneau (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), l'équipe formée par J. Clement-Cottuz (M1 mathématiques appliquées à l'Université Grenoble Alpes, à Grenoble) et L. Vanhaelewyn (L3 à l'ENS, à Paris), l'équipe formée par S. Buchet (M1 MEEF maths à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et C. Lucas (M1 MEEF maths à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), l'équipe formée par M. Baccara (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris, M1 à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, à Paris), S. Baumert (césure, à Paris) et P. Boureau (M1 à l'ENS, à Paris), l'équipe formée par F. Arous (L2 MFA à l'Université Paris Cité, à Paris), T. De Wolf (2ème bachelor au Sciences Po, à Paris et à l'Université Paris Cité, à Paris) et J. Scardigli (2ème bachelor à la Cambridge University, à Cambridge).

Solution du problème 7 : Appelons A l'ensemble des 5 premiers élèves du classement, C l'ensemble des 15 derniers élèves du classement, et B l'ensemble des 4 autres élèves, ayant un classement intermédiaire. Chaque duel valant un point, le nombre total de points attribués pour les duels internes à A est égal à $\frac{5 \times 4}{2} = 10$. Le score collectif des élèves de A ne peut dépasser celui obtenu dans le cas où ils gagnent tous leurs duels contre B et C , c'est-à-dire $10 + 5 \times (24 - 5) = 105$ points. D'autre part, le nombre total de points attribués pour les duels internes de C est égal à $\frac{15 \times 14}{2} = 105$ points. C'est le score collectif minimal de C , au cas où ils perdent tous leurs duels avec A et B . Comme les scores collectifs de A et de C sont égaux, ils sont tous deux de 105 points, les élèves de A ont gagné tous les duels contre B et C , et les élèves de B ont gagné tous les duels contre C . Les seuls duels pouvant donner lieu à un match nul sont donc internes à A , B ou C . Pour chacun de ces 3 ensembles, il s'agit de déterminer combien de duels non nuls au minimum sont nécessaires

pour départager tous les élèves de l'ensemble (puisqu'il n'y a pas d'ex-aequos).

Dans un ensemble de 2ℓ ou $2\ell + 1$ élèves E_i ayant des scores tous distincts, on peut trouver au moins ℓ élèves ayant des scores tous strictement plus grands ou tous strictement plus petits que le score moyen qui correspond à tous des duels nuls, puisqu'au plus un élève aura ce score moyen. Tous les scores étant distincts, l'écart en valeur absolue entre leurs scores et le score moyen sera au moins de $\frac{1}{2}, 1, \dots, \frac{\ell}{2}$, ce qui correspond à au moins $1, 2, \dots, \ell$ duels victorieux, soit en tout au moins $\frac{\ell(\ell+1)}{2}$ duels non nuls au sein de cet ensemble. Ce nombre minimal est réalisé par la situation où E_i gagne contre $E_{\ell+1}, \dots, E_{2\ell-i+1}$ pour $i = 1, \dots, \ell$ et tous les autres duels sont nuls. Dans A avec $\ell = 2$, on a au moins 3 duels non nuls, donc au plus $10 - 3 = 7$ duels nuls. Dans B avec $\ell = 2$, on a au moins 3 duels non nuls, donc au plus $6 - 3 = 3$ duels nuls. Dans C avec $\ell = 7$, on a au moins 28 duels non nuls, donc au plus $105 - 28 = 77$ duels nuls. Au total, cela donne au plus $7 + 3 + 77 = 87$ duels non nuls dans le tournoi.

Ont fourni une solution correcte : S. Gvozdić (LDD2 Informatique - Mathématiques à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), N. Déhais (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), E. Fagnou (M2 à Télécom Paris, à Palaiseau), C. Metz (doctorant à l'Université Paris-Saclay, à Orsay et au CEA, à Palaiseau), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon), T. Ravary (enseignant au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau), C. Romon (secrétaire général de la Mission interministérielle pour la qualité des constructions publiques, à La Défense), l'équipe formée par M. Baccara (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris, M1 à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, à Paris), S. Baumert (césure, à Paris) et P. Boureau (M1 à l'ENS, à Paris).

Solution du problème 8 : Recherchons les nombres premiers p et les entiers strictement positifs a, b et d tels que $p^{a+1} + 9^b = d^2$. On a alors $p^{a+1} = d^2 - 9^b = (d - 3^b)(d + 3^b)$ (*). Montrons d'abord qu'il n'y a pas de solution lorsque p n'est ni 2 ni 3. Comme $d - 3^b$ et $d + 3^b$ ne diffèrent pas par un multiple de p , ils ne peuvent tous deux être multiples de p . Donc le plus petit, soit $d - 3^b$, est égal à 1 tandis que le plus grand, soit $d + 3^b$, est égal à p^{a+1} . En prenant leur différence, on obtient $2 \times 3^b = p^{a+1} - 1$. Remarquons que si $b = 1$, alors $p^{a+1} = 7$, donc $a = 0$ ce qui est à rejeter. Supposons par l'absurde l'existence d'une solution avec $b \geq 2$. En factorisant $p^{a+1} - 1 = (p - 1)(1 + p + p^2 + \dots + p^a)$, comme $p - 1$ est pair et supérieur à 2, on déduit que $\frac{p-1}{2}$ et $1 + p + p^2 + \dots + p^a$ sont des puissances de 3. La première information donne $p \equiv 1$ modulo 3, ceci implique avec la deuxième que $a + 1$ est un multiple de 3. Mais alors on peut factoriser $1 + p + p^2 + \dots + p^a = (1 + p + p^2)(1 + p^3 + p^6 + \dots + p^{a-2})$. Ceci doit être une puissance de 3, mais si $\frac{p-1}{2} = 3^c$ pour un entier $c \geq 1$, alors $1 + p + p^2 = 3 + 2 \times 3^{c+1} + 4 \times 3^{2c}$ est divisible par 3 mais pas par 9, une contradiction.

Si $p = 2$, comme $(d + 3^b) - (d - 3^b) = 2 \times 3^b$ est divisible par 2 mais pas par 4, dans (*) on doit forcément avoir $d - 3^b = 2$ et $d + 3^b = 2^a$. En prenant leur différence, on obtient $3^b = 2^{a-1} - 1$. Pour que le membre de droite soit multiple de 3, il faut que $a - 1$ soit pair, et on peut donc factoriser $2^{a-1} - 1 = (2^{\frac{a-1}{2}} - 1)(2^{\frac{a-1}{2}} + 1)$. Comme ces facteurs diffèrent de 2, ils ne peuvent tous deux être une puissance de 3, de sorte que le plus petit, soit $2^{\frac{a-1}{2}} - 1$, est égal à 1 et le plus grand, soit $2^{\frac{a-1}{2}} + 1$, est égal à 3^b . Ceci implique que $a = 3$ et $b = 1$, ce qui correspond à la solution $2^4 + 9^1 = 25 = 5^2$.

Si $p = 3$, dans (*) on a $d - 3^b = 3^\alpha$ et $d + 3^b = 3^\beta$ où $0 \leq \alpha < \beta$ sont des entiers, de sorte que $2 \times 3^b = 3^\beta - 3^\alpha$. Dans cette égalité, les deux plus petits exposants doivent être égaux, donc $\alpha = b$. On en déduit que $\beta = b + 1$, et $a = \alpha + \beta - 1 = 2b$, ce qui correspond aux solutions $3^{2b+1} + 9^b = 4 \times 3^{2b} = (2 \times 3^b)^2$.

En conclusion, les solutions sont $(a, b) = (3, 1)$ pour $p = 2$ et $(a, b) = (2b, b)$ avec $b \geq 1$ pour $p = 3$.

Ont fourni une solution correcte : K. Ricard (Tle au Lycée Français Alexandre Yersin, à Hanoi, Vietnam), E. Crou (LDD2 MPSI à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), S. Gvozdić (LDD2 Informatique - Mathématiques à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), M. Yadollahi (LDD2 math-physique à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), M. Corlay (1ère année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), N. Déhais (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), Q. Hurez (1ère année à l'ENS, à Paris), C. Metz (doctorant à l'Université Paris-Saclay, à Orsay et au CEA, à Palaiseau), J. Muller (doctorant à l'Institut Galilée, à l'Université Sorbonne Paris Nord, à Villetaneuse), D. Collignon (attaché statisticien hors classe au département informatique et télécommunications pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon), H. N. Nguyen (analyste quantitatif, à Paris), T. Ravary (enseignant au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau), C. Romon (secrétaire général de la Mission interministérielle pour la qualité des constructions publiques, à La Défense), l'équipe formée par C. Cedillo-Vayson de Pradene (Tle au Lycée Jean de la Fontaine, à Paris) et A. Lemarié (Tle au Lycée Jean de la Fontaine, à Paris), l'équipe formée par I. Israël (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Perdriaud (LDD1 info-math à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et T. Saïdi-Pankow (Tle au Lycée Jean-Pierre Vernant, à Sèvres), l'équipe formée par M. Baccara (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris, M1 à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, à Paris), S. Baumert (césure, à Paris) et P. Boureau (M1 à l'ENS, à Paris), l'équipe formée par F. Arous (L2 MFA à l'Université Paris Cité, à Paris), T. De Wolf (2ème bachelor à Sciences Po, à Paris et à l'Université Paris Cité, à Paris) et J. Scardigli (2ème bachelor à la Cambridge University, à Cambridge).