Marathon d'Orsay de Mathématiques

Résultats de la première vague d'octobre 2024

Voici les solutions des premiers problèmes, avec les noms des participants qui ont fourni une solution correcte.

Solution du problème 1 : Il existe bien une stratégie permettant à Marina de gagner à coup sûr. Marina commence par remplacer 10^{2024} par 2^{2024} et 5^{2024}. Par la suite, chaque opération effectuée par Bernadette ne concernera que des puissances de 2 ou des puissances de 5 (puisqu'aucune puissance de 5, impaire, ne peut être égale à une puissance de 2, paire). La suite de la stratégie de Marina consiste à faire en sorte que si $2^{a_1}, \ldots, 2^{a_k}$ sont toutes les puissances de 2 affichées au tableau après qu'elle ait joué, alors toutes les puissances de 5 affichée au tableau à ce moment sont $5^{a_1}, \ldots, 5^{a_k}$. C'est bien le cas après le premier coup de Marina, puisque l'on a alors $k = 1$ et $a_1 = 2024$. Ensuite, chaque fois que Bernadette effectue une opération concernant une puissance de 2, au coup suivant Marina effectue l'opération correspondante avec les puissances de 5, et vice-versa. Ceci est toujours possible, puisque si on sait effectuer l'une des opérations permises avec $2^{a_1}, \ldots, 2^{a_k}$, alors on sait faire la même opération avec $5^{a_1}, \ldots, 5^{a_k}$, et vice-versa. De plus, cela permet d'obtenir à nouveau les mêmes exposants pour les puissances de 2 et de 5 affichées au tableau. Ainsi, Marina sera toujours en mesure de jouer, et ce sera Bernadette qui à un certain moment ne le pourra plus. En effet, le jeu se termine forcément en un nombre fini de tours, puisqu'à chaque coup le produit des entiers au tableau ne peut que décroître ou rester stationnaire, et ce dernier cas ne peut se produire qu'un nombre fini de fois consécutivement car le nombre d'entiers au tableau augmente alors de 1 mais ne peut dépasser 4048.

Ont fourni une solution correcte :
X. Chen (4ème au Lycée Franco-Allemand, à Buc),
E. Cerisier (3ème au Collège Les Francs Bourgeois, à Paris), travail dirigé par le Dr Zmeikov,
I. Houari (2nde au Lycée Jacques Monod, à Clamart),
R. Missoum (2nde au CNED, à Paris),
T. Poncet (2nde au Lycée Notre Dame les Oiseaux, à Verneuil sur Seine),
L. Abou Merhi (1ère au Lycée Ecole Alsacienne, à Paris),
H. Bernard (1ère au Lycée Stanislas, à Paris),
L. Dilouya (1ère au Lycée Ecole Alsacienne, à Paris),
A. Jolivel (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc),
C. Roux–Bénabou (1ère au Lycée Charlemagne, à Paris),
C. Sellier Pacheco de Almeida (1ère au Lycée Ecole Alsacienne, à Paris),
V. Borde (Tle au Lycée Richelieu, à Rueil-Malmaison),
V. Che-He (Tle au Lycée Pierre-Gilles de Gennes-ENCPB, à Paris),
C. Dang (Tle au Lycée Louis-le-Grand, à Paris),
A. Desjardins (Tle au Lycée Blaise Pascal, à Orsay),
H. Dilouya (Tle au Lycée Ecole Alsacienne, à Paris),
C. Dinh (Tle au Lycée Jean-Baptiste Corot, à Savigny-sur-Orge),
L. Foucher (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc),
H. Jestin (Tle au Lycée Les Francs Bourgeois, à Paris),

P. Pai Liu (Tle au Lycée Notre-Dame Providence, à Enghien-les-Bains),
T. Thevenon (Tle à l'Ecole Jeannine Manuel, à Paris),
J. Zhou (Tle au Lycée Léon Blum, à Créteil),
P. Combe (LDD1 mathématiques-économie à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),
Y. Toure (L1 mathématiques-physique à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),
S. Jabri (L2 Mathématiques à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),
K. Sahraoui (L2 mathématiques à l'Université d'Avignon, à Avignon),
S. d'Epremesnil (L3 mathématiques à l'Université Paris Cité, à Paris),
Y. Wang (2ème année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau),
M. Yadollahi (M1 mathématiques à l'ENS, à Paris),
X. Ye (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
A. Bonvalet (M2 de Mécanique à Sorbonne Université, à Paris),
N. Alami (3ème année à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette),
J. Lenormand (3ème année en informatique à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette),
T. Soro (3ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
T. Lejeune (Doctorant à Sorbonne Université, à Paris),
P. Revenant (Doctorant à l'ENS de Lyon, à Lyon),
D. Twigt (Doctorant à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),
D. Collignon (Chef de Département au Ministère de la Justice/SG/DIR-SG Sud-Est, à Aix-en-Provence),
N. Didrit (Professeur de Mathématiques et Informatique au Lycée La Salle-Passy Buzenval, à Rueil-Malmaison),
M. Farid (Consultant chez Awalee Consulting, à Paris),
Q. Granier (Master au Technische Universität München, à Munich, 5ème année à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette),
V. Lefèvre (Chargé de recherche Inria au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon),
C. Lemonnier (Professeure agrégée de mathématiques au Lycée Marguerite de Navarre, à Alençon),
A. Nguyen (2eme année préparatoire intégrée à l'ISAT, à Nevers),
T. Ravary (Enseignant au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau),
C. Romon (Retraité, à Carrières-sur-Seine),
P. Rousseau (Professeur en CPGE au Lycée Marie Curie, à Versailles),
L. Touati (Ingénieur R&D à Télécom Paris, à Palaiseau),
l'équipe formée par K. Caillard (1ère au Lycée Notre Dame les Oiseaux, à Verneuil sur Seine) et A. Tarassov (2nde au Lycée Notre Dame les Oiseaux, à Verneuil sur Seine),
l'équipe formée par Z. Chalançon (Tle au Lycée Marie Curie, à Sceaux), M. Morabito (Tle au Lycée Marie Curie, à Sceaux) et Y. Wang (Tle au Lycée Marie Curie, à Sceaux),
l'équipe formée par H. Fassier (Tle au Lycée Notre-Dame Sainte-Croix, à Neuilly-sur-Seine), O. Fruneau (Tle au Lycée Notre-Dame Sainte-Croix, à Neuilly-sur-Seine) et L. Hansen (Tle au Lycée Notre-Dame Sainte-Croix, à Neuilly-sur-Seine),
l'équipe formée par C. Portes (Tle au Lycée Saint Erembert, à Saint-Germain-en-Laye) et E. Ray (Tle au Lycée Saint Erembert, à Saint-Germain-en-Laye),
l'équipe formée par J. Servat (Tle au Lycée Epin, à Vitry-sur-Seine), W. Ung (Tle au Lycée Epin, à Vitry-sur-Seine) et R. Weexsteen (Tle au Lycée Epin, à Vitry-sur-Seine),
l'équipe formée par A. Tefridj (Tle au Lycée Notre-Dame Sainte-Croix, à Neuilly-sur-Seine) et W. Wu (Tle au Lycée Notre-Dame Sainte-Croix, à Neuilly-sur-Seine),
l'équipe formée par A. Dusoulier (MPSI au Lycée Louis-le-Grand, à Paris) et N. Ismaaili Erny (MPSI au Lycée Louis-le-Grand, à Paris),
l'équipe formée par D. Akproh (1ère bachelor au York University, à Toronto) et S. Bakayoko (Ingénieur diplômé à l'Ecole Royale Militaire, à Bruxelles),
l'équipe formée par A. Duchemin (L3 à l'ENS, à Paris) et A. Tosel (L3 à l'ENS, à Paris),
l'équipe formée par S. Kang (2ème année de CPGE ECG au Lycée Saint-Louis, à Paris),

D. Tran (2ème année de CPGE MPSI au Lycée Charlemagne, à Paris) et L. Yu (2ème année de CPGE ECG au Lycée Chaptal, à Paris),
l'équipe formée par C. Liu (2ème année au Cy Tech, à Cergy) et Y. Loesch (3ème année à Télécom SudParis, à Evry),
l'équipe formée par A. Lotfi (3ème année à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette) et H. Mrabet (3ème année à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette),
l'équipe formée par J. Clément-Cottuz (Doctorant à l'Université de Rouen, à Rouen) et L. Vanhaelewyn (M2 Mathématiques à Sorbonne Université, à Paris),
l'équipe formée par M. Baccara (Doctorant au CMAP, à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), S. Baumert (Enseignant au lycée, à Paris) et J. Ishak (Doctorante au LAGA, à l'Université Sorbonne Paris Nord, à Villetaneuse),
l'équipe formée par B. Cavarretta (Doctorant à l'Université Paris Dauphine, à Paris) et S. Cavarretta (Professeur de mathématiques au Collège Clément Janequin, à Montoire),
l'équipe formée par N. Brigouleix (Enseignant au Lycée Colbert, à Paris) et V. de Daruvar (Enseignant au Lycée Charlemagne, à Paris),
l'équipe formée par I. Leskevich (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), A. Matveeva (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau) et F. Petranovskii (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau).

Solution du problème 2 : Commençons par montrer que la suite (x_n) contient au moins un entier pair. Pour cela, supposons par l'absurde que tous les entiers x_n sont impairs. Notons y_n l'entier obtenu en retirant le chiffre de droite de x_n dans sa représentation décimale. Comme x_{n+1} est compris entre $x_n + 1$ et $x_n + 9$, y_{n+1} ne peut être égal qu'à y_n ou à $y_n + 1$. Par conséquent, tous les entiers $\geq y_1$ sont obtenus dans la suite (y_n). En particulier, pour un certain n on obtiendra un entier y_n dont la représentation décimale ne contient que des chiffres impairs. Comme x_n est supposé impair, cela signifie que x_n a aussi sa représentation décimale ne contenant que des chiffres impairs. Mais alors x_{n+1} est obtenu en ajoutant l'entier x_n impair avec l'un de ses chiffres, également impair, ce qui donne x_{n+1} pair, une contradiction.
Si x_n est un entier pair dans la suite, alors on peut trouver un autre entier pair x_m avec $m > n$, de sorte qu'il y a en fait une infinité d'entiers pairs dans la suite. Si ce n'était pas le cas, il suffirait de rejouer l'argument précédent avec la suite commençant par l'entier impair x_{n+1}, et qui mènerait à la même contradiction.

Ont fourni une solution correcte :
X. Chen (4ème au Lycée Franco-Allemand, à Buc),
E. Cerisier (3ème au Collège Les Francs Bourgeois, à Paris), travail dirigé par le Dr Zmeikov,
M. Drieu (2nde au Lycée Madeleine Daniélou, à Rueil-Malmaison),
L. Abou Merhi (1ère au Lycée Ecole Alsacienne, à Paris),
I. Audusse (1ère au Lycée Rodin, à Paris),
H. Bernard (1ère au Lycée Stanislas, à Paris),
A. Dieulin (1ère au Lycée Charlemagne, à Paris),
A. Jolivel (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc),
C. Roux–Bénabou (1ère au Lycée Charlemagne, à Paris),
C. Sellier Pacheco de Almeida (1ère au Lycée Ecole Alsacienne, à Paris),
J. Szeftel (1ère au Lycée Charlemagne, à Paris),
T. Xu (1ère au Lycée Pierre d'Ailly, à Compiègne),
H. Alves (Tle au Lycée Hoche, à Versailles),
P. Bouniq-Mercier (Tle au Lycée Victor Hugo, à Paris),
V. Che-He (Tle au Lycée Pierre-Gilles de Gennes-ENCPB, à Paris),
R. Dambrin (Tle au Lycée Albert Camus, à Bois-Colombes),

A. Desjardins (Tle au Lycée Blaise Pascal, à Orsay),
H. Dilouya (Tle au Lycée Ecole Alsacienne, à Paris),
C. Dinh (Tle au Lycée Jean-Baptiste Corot, à Savigny-sur-Orge),
L. Foucher (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc),
H. Jestin (Tle au Lycée Les Francs Bourgeois, à Paris),
S. Koch (Tle au Lycée La Salle-Passy Buzenval, à Rueil-Malmaison),
P. Levasseur (Tle au Lycée Alain René Lesage, à Vannes),
P. Pai Liu (Tle au Lycée Notre-Dame Providence, à Enghien-les-Bains),
N. Pernin (Tle au Lycée Hélène Boucher, à Paris),
Q. Rabineau (Tle au Lycée Descartes, à Antony),
A. Rosse (Tle au Lycée Delamare-Deboutteville, à Forges-les-Eaux),
M. Rouault (Tle au Lycée Diderot, à Paris),
T. Thevenon (Tle à l'Ecole Jeannine Manuel, à Paris),
E. Torres-Gajda (Tle au Lycée Saint Jude, à Armentières),
A. Uzunov (Tle au Lycée Le Bon Sauveur, à Le Vésinet),
K. Sahraoui (L2 mathématiques à l'Université d'Avignon, à Avignon),
S. d'Epremesnil (L3 mathématiques à l'Université Paris Cité, à Paris),
A. Bertail (M1 Algèbre appliquée à l'Université de Versailles Saint-Quentin, à Versailles),
N. Gonde (M1 Biosciences à l'ENS de Lyon, à Lyon),
J. Legrand (2ème année à l'ESPCI, à Paris),
M. Yadollahi (M1 mathématiques à l'ENS, à Paris),
X. Ye (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
A. Bonvalet (M2 de Mécanique à Sorbonne Université, à Paris),
N. Alami (3ème année à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette),
J. Lenormand (3ème année en informatique à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette),
A. Mazeyrat (3ème année à l'ENSIMAG, à Grenoble et à l'INPGI, à Grenoble),
T. Soro (3ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
N. Tardy (M2 MdA à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),
P. Revenant (Doctorant à l'ENS de Lyon, à Lyon),
D. Twigt (Doctorant à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),
D. Collignon (Chef de Département au Ministère de la Justice/SG/DIR-SG Sud-Est, à Aix-en-Provence),
N. Didrit (Professeur de Mathématiques et Informatique au Lycée La Salle-Passy Buzenval, à Rueil-Malmaison),
M. Farid (Consultant chez Awalee Consulting, à Paris),
Q. Granier (Master au Technische Universität München, à Munich, 5ème année à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette),
V. Lefèvre (Chargé de recherche Inria au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon),
C. Lemonnier (Professeure agrégée de mathématiques au Lycée Marguerite de Navarre, à Alençon),
A. Lucazeau (Ingénieure, à Sidney),
H. A. Mai (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
T. Ravary (Enseignant au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau),
C. Romon (Retraité, à Carrières-sur-Seine),
P. Rousseau (Professeur en CPGE au Lycée Marie Curie, à Versailles),
L. Touati (Ingénieur R&D à Télécom Paris, à Palaiseau),
l'équipe formée par K. Caillard (1ère au Lycée Notre Dame les Oiseaux, à Verneuil sur Seine) et A. Tarassov (2nde au Lycée Notre Dame les Oiseaux, à Verneuil sur Seine),
l'équipe formée par A. De Raigniac (1ère au Lycée Stanislas, à Paris), G. Godron (1ère au Lycée Stanislas, à Paris) et L. Vitrac (1ère au Lycée Stanislas, à Paris),
l'équipe formée par S. Marquer Buffon (1ère au Lycée Saint Erembert, à Saint-Germain-en-Laye) et A. Zagury (1ère au Lycée Saint Erembert, à Saint-Germain-en-Laye),

l'équipe formée par H. Mourand (1ère au Lycée Sophie Barat, à Châtenay-Malabry), S. Schleret (1ère au Lycée Sophie Barat, à Châtenay-Malabry) et M. Teyssonneyre (1ère au Lycée Sophie Barat, à Châtenay-Malabry),
l'équipe formée par N. Cosnier (Tle au Lycée Charles Péguy, à Paris) et C. Semichon-Casal (Tle au Lycée Charles Péguy, à Paris),
l'équipe formée par J. Servat (Tle au Lycée Epin, à Vitry-sur-Seine), W. Ung (Tle au Lycée Epin, à Vitry-sur-Seine) et R. Weexsteen (Tle au Lycée Epin, à Vitry-sur-Seine),
l'équipe formée par A. Tefridj (Tle au Lycée Notre-Dame Sainte-Croix, à Neuilly-sur-Seine) et W. Wu (Tle au Lycée Notre-Dame Sainte-Croix, à Neuilly-sur-Seine),
l'équipe formée par A. Dusoulier (MPSI au Lycée Louis-le-Grand, à Paris) et N. Ismaaili Erny (MPSI au Lycée Louis-le-Grand, à Paris),
l'équipe formée par D. Akproh (1ère bachelor au York University, à Toronto) et S. Bakayoko (Ingénieur diplômé à l'Ecole Royale Militaire, à Bruxelles),
l'équipe formée par A. Duchemin (L3 à l'ENS, à Paris) et A. Tosel (L3 à l'ENS, à Paris),
l'équipe formée par C. Liu (2ème année au Cy Tech, à Cergy) et Y. Loesch (3ème année à Télécom SudParis, à Evry),
l'équipe formée par J. Clément-Cottuz (Doctorant à l'Université de Rouen, à Rouen) et L. Vanhaelewyn (M2 Mathématiques à Sorbonne Université, à Paris),
l'équipe formée par M. Baccara (Doctorant au CMAP, à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), S. Baumert (Enseignant au lycée, à Paris) et J. Ishak (Doctorante au LAGA, à l'Université Sorbonne Paris Nord, à Villetaneuse),
l'équipe formée par B. Cavarretta (Doctorant à l'Université Paris Dauphine, à Paris) et S. Cavarretta (Professeur de mathématiques au Collège Clément Janequin, à Montoire),
l'équipe formée par F. Giton (Professeur de mathématiques au Lycée André Malraux, à Gaillon) et Q. Giton (Doctorant à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),
l'équipe formée par N. Brigouleix (Enseignant au Lycée Colbert, à Paris) et V. de Daruvar (Enseignant au Lycée Charlemagne, à Paris),
l'équipe formée par I. Leskevich (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), A. Matveeva (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau) et F. Petranovskii (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau).

Solution du problème 3 : Montrons que $\ell = \frac{1}{18}$ est la longueur minimale permettant de recouvrir E avec 7 intervalles fermés de longueur ℓ. D'une part, les 7 intervalles $[0, \frac{1}{18}]$, $[\frac{1}{18}, \frac{1}{9}]$, $[\frac{1}{9}, \frac{1}{6}]$, $[\frac{7}{36}, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{3}, \frac{7}{18}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{10}{18}]$ et $[\frac{17}{18}, 1]$ font l'affaire, puisque $\frac{1}{k}$ est dans le premier intervalle pour $k \geq 18$, dans le deuxième pour k entre 9 et 18, dans le troisième pour k entre 6 et 9, dans le quatrième pour $k = 4$ ou 5, dans le cinquième pour $k = 3$, dans le sixième pour $k = 2$ et dans le septième pour $k = 1$.
D'autre part, montrons que si $\ell < \frac{1}{18}$ il n'est pas possible de recouvrir E avec 7 intervalles fermés de longueur ℓ. Supposons par l'absurde qu'un tel recouvrement existe. Soit N un entier suffisamment grand pour que $\frac{1}{N} < \frac{1}{18} - \ell$. Considérons les 8 nombres $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{18}$ et $\frac{1}{N}$. Comme ils sont contenus dans la réunion des 7 intervalles, deux d'entre eux au moins sont contenus dans le même intervalle, et en particulier sont à une distance $\leq \ell$ l'un de l'autre. Mais les distances entre deux nombres successifs dans cette liste sont $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \frac{1}{18}$ et $\frac{1}{18} - \frac{1}{N}$, toutes strictement supérieures à ℓ, une contradiction.

Ont fourni une solution correcte :
E. Cerisier (3ème au Collège Les Francs Bourgeois, à Paris),
L. Abou Merhi (1ère au Lycée Ecole Alsacienne, à Paris),
H. Bernard (1ère au Lycée Stanislas, à Paris),
A. Jolivel (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc),
T. Xu (1ère au Lycée Pierre d'Ailly, à Compiègne),
V. Che-He (Tle au Lycée Pierre-Gilles de Gennes-ENCPB, à Paris),

C. Dang (Tle au Lycée Louis-le-Grand, à Paris),
H. Dilouya (Tle au Lycée Ecole Alsacienne, à Paris),
L. Foucher (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc),
S. Koch (Tle au Lycée La Salle-Passy Buzenval, à Rueil-Malmaison),
M. Rouault (Tle au Lycée Diderot, à Paris),
E. Torres-Gajda (Tle au Lycée Saint Jude, à Armentières),
P. Combe (LDD1 mathématiques-économie à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),
V. Gérin (L2 mathématiques à Sorbonne Université, à Paris),
K. Sahraoui (L2 mathématiques à l'Université d'Avignon, à Avignon),
J. Dourville (L3 à l'ENS, à Paris),
S. d'Epremesnil (L3 mathématiques à l'Université Paris Cité, à Paris),
A. Bertail (M1 Algèbre appliquée à l'Université de Versailles Saint-Quentin, à Versailles),
N. Gonde (M1 Biosciences à l'ENS de Lyon, à Lyon),
J. Legrand (2ème année à l'ESPCI, à Paris),
Y. Wang (2ème année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau),
M. Yadollahi (M1 mathématiques à l'ENS, à Paris),
X. Ye (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
A. Bonvalet (M2 de Mécanique à Sorbonne Université, à Paris),
P. Bouyé (3ème année à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette),
J. Lenormand (3ème année en informatique à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette),
A. Mazeyrat (3ème année à l'ENSIMAG, à Grenoble et à l'INPGI, à Grenoble),
T. Soro (3ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
N. Tardy (M2 MdA à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),
T. Lejeune (Doctorant à Sorbonne Université, à Paris),
P. Revenant (Doctorant à l'ENS de Lyon, à Lyon),
D. Twigt (Doctorant à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),
D. Collignon (Chef de Département au Ministère de la Justice/SG/DIR-SG Sud-Est, à Aix-en-Provence),
N. Didrit (Professeur de Mathématiques et Informatique au Lycée La Salle-Passy Buzenval, à Rueil-Malmaison),
Q. Granier (Master au Technische Universität München, à Munich, 5ème année à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette),
S. Kissangoula (Etudiant à l'Université Paris-Est Créteil, à Créteil, Professeur agrégé, à Créteil),
G. Labou (Licencié en mathématiques à Sorbonne Université, à Paris),
V. Lefèvre (Chargé de recherche Inria au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon),
C. Lemonnier (Professeure agrégée de mathématiques au Lycée Marguerite de Navarre, à Alençon),
T. Leroux (5/2 en MPX au Lycée Pierre Corneille, à Rouen),
A. Lucazeau (Ingénieure, à Sidney),
H. A. Mai (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
T. Ravary (Enseignant au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau),
C. Romon (Retraité, à Carrières-sur-Seine),
P. Rousseau (Professeur en CPGE au Lycée Marie Curie, à Versailles),
l'équipe formée par E. Cherradi (2nde au Lycée Notre Dame les Oiseaux, à Verneuil sur Seine), I. Cherradi (2nde au Lycée Notre Dame les Oiseaux, à Verneuil sur Seine) et L. Cherradi (3ème au Collège Notre Dame les Oiseaux, à Verneuil sur Seine),
l'équipe formée par S. Marquer Buffon (1ère au Lycée Saint Erembert, à Saint-Germain-en-Laye) et A. Zagury (1ère au Lycée Saint Erembert, à Saint-Germain-en-Laye),
l'équipe formée par H. Mourand (1ère au Lycée Sophie Barat, à Châtenay-Malabry), S. Schleret (1ère au Lycée Sophie Barat, à Châtenay-Malabry) et M. Teyssonneyre (1ère au Lycée Sophie Barat, à Châtenay-Malabry),

l'équipe formée par M. Fourcade (Tle au Lycée Bossuet-Notre-Dame, à Paris), P. Gallois (1ère au Lycée Louis-le-Grand, à Paris) et G. Lacapelle (Tle au Lycée Notre-Dame de Sion, à Paris),
l'équipe formée par A. Tefridj (Tle au Lycée Notre-Dame Sainte-Croix, à Neuilly-sur-Seine) et W. Wu (Tle au Lycée Notre-Dame Sainte-Croix, à Neuilly-sur-Seine),
l'équipe formée par A. Dusoulier (MPSI au Lycée Louis-le-Grand, à Paris) et N. Ismaaili Erny (MPSI au Lycée Louis-le-Grand, à Paris),
l'équipe formée par D. Demirer (LDD1 informatique-mathématiques à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et B. Kunur (LDD1 mathématiques-économie à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),
l'équipe formée par D. Akproh (1ère bachelor au York University, à Toronto) et S. Bakayoko (Ingénieur diplômé à l'Ecole Royale Militaire, à Bruxelles),
l'équipe formée par A. Duchemin (L3 à l'ENS, à Paris) et A. Tosel (L3 à l'ENS, à Paris),
l'équipe formée par S. Kang (2ème année de CPGE ECG au Lycée Saint-Louis, à Paris), D. Tran (2ème année de CPGE MPSI au Lycée Charlemagne, à Paris) et L. Yu (2ème année de CPGE ECG au Lycée Chaptal, à Paris),
l'équipe formée par J. Clément-Cottuz (Doctorant à l'Université de Rouen, à Rouen) et L. Vanhaelewyn (M2 Mathématiques à Sorbonne Université, à Paris),
l'équipe formée par M. Baccara (Doctorant au CMAP, à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), S. Baumert (Enseignant au lycée, à Paris) et J. Ishak (Doctorante au LAGA, à l'Université Sorbonne Paris Nord, à Villetaneuse),
l'équipe formée par N. Brigouleix (Enseignant au Lycée Colbert, à Paris) et V. de Daruvar (Enseignant au Lycée Charlemagne, à Paris),
l'équipe formée par I. Leskevich (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), A. Matveeva (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau) et F. Petranovskii (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau).

Solution du problème 4 : Remarquons que si Marc choisit tous ses entiers égaux à 2, ce qui est possible pour toute valeur de N, alors Sofia ne peut obtenir que des sommes paires. Il est donc nécessaire que N soit pair. Montrons à présent qu'il suffit d'avoir N pair pour que Sofia puisse faire un bon choix. Notons $a_1, \ldots, a_N$ les entiers fournis par Marc, rangés par ordre croissant : $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_N \leq N$. On peut supposer qu'au moins un de ces entiers n'est pas égal à 2, sinon il suffit d'en prendre $\frac{N}{2}$ pour obtenir une somme N. Notons N_1 le nombre de ces entiers qui sont égaux à 1 et N_2 le nombre de ceux qui sont égaux à 2. On a donc $N_1 \geq 1$ (ou encore $a_1 = 1$) puisque tous les $a_i \geq 1$ ne sont pas égaux à 2 mais qu'ils ont 2 pour moyenne arithmétique. Il y a $N - N_1 - N_2$ entiers ≥ 3, de sorte que la somme des a_i est au moins égale à $N_1 + 2N_2 + 3(N - N_1 - N_2)$. Comme celle-ci vaut $2N$, on obtient $2N \geq N_1 + 2N_2 + 3(N - N_1 - N_2)$ et donc $2N_1 + N_2 \geq N$. Comme $N_1 + 2N_2 \geq \frac{1}{2}(2N_1 + N_2)$, on en déduit que $N_1 + 2N_2 \geq \frac{N}{2}$: la somme S des entiers égaux à 1 ou 2 parmi ceux choisis par Marc satisfait $S \geq \frac{N}{2}$. Remarquons que l'on peut aussi obtenir tous les entiers entre 1 et S comme somme d'une partie des entiers $a_1, \ldots, a_{N_1+N_2}$. C'est évident si $N_2 = 0$, et sinon on obtient $S-1$ en les sommant tous sauf $a_1 = 1$, puis les valeurs $\leq S - 2$ en répétant cet argument pour les entiers $a_1, \ldots, a_{N_1+(N_2-1)}$, c'est-à-dire en excluant $a_{N_1+N_2} = 2$. Si $S \geq N$, Sofia sait donc faire son choix parmi les $N_1 + N_2$ premiers entiers. Si $S < N$, alors $a_{N_1+N_2+1} + \ldots + a_N = 2N - S > N$. Montrons dans ce cas que l'on peut choisir certains entiers parmi $a_{N_1+N_2+1}, \ldots, a_N$ de sorte que leur somme S' est comprise entre $\frac{N}{2}$ et N. Il suffira alors à Sofia de compléter ces entiers par certains entiers parmi $a_1, \ldots, a_{N_1+N_2}$ ayant pour somme $S = N - S'$ entre 0 et $\frac{N}{2}$ pour faire un bon choix. Si $a_N \geq \frac{N}{2}$, alors l'entier a_N tout seul fait l'affaire. Si $a_N < \frac{N}{2}$, prenons des entiers parmi $a_{N_1+N_2+1}, \ldots, a_N$ et ayant la somme la plus grande possible mais $< \frac{N}{2}$. Tous les entiers ne sont pas choisis puisque $a_{N_1+N_2+1} + \ldots + a_N > N$. En leur rajoutant un seul entier a_i pas encore choisi parmi $a_{N_1+N_2+1}, \ldots, a_N$, on obtient donc comme souhaité une

somme $S' \geq \frac{N}{2}$, mais telle que $S' = (S' - a_i) + a_i < \frac{N}{2} + \frac{N}{2} = N$ puisque $a_i \leq a_N < \frac{N}{2}$.

Ont fourni une solution correcte :
H. Bernard (1ère au Lycée Stanislas, à Paris),
A. Jolivel (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc),
T. Xu (1ère au Lycée Pierre d'Ailly, à Compiègne),
V. Che-He (Tle au Lycée Pierre-Gilles de Gennes-ENCPB, à Paris),
H. Dilouya (Tle au Lycée Ecole Alsacienne, à Paris),
L. Foucher (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc),
S. Koch (Tle au Lycée La Salle-Passy Buzenval, à Rueil-Malmaison),
J. Dourville (L3 à l'ENS, à Paris),
S. d'Epremesnil (L3 mathématiques à l'Université Paris Cité, à Paris),
A. Bertail (M1 Algèbre appliquée à l'Université de Versailles Saint-Quentin, à Versailles),
N. Gonde (M1 Biosciences à l'ENS de Lyon, à Lyon),
J. Legrand (2ème année à l'ESPCI, à Paris),
Y. Wang (2ème année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau),
M. Yadollahi (M1 mathématiques à l'ENS, à Paris),
X. Ye (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
A. Bonvalet (M2 de Mécanique à Sorbonne Université, à Paris),
N. Alami (3ème année à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette),
J. Lenormand (3ème année en informatique à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette),
A. Mazeyrat (3ème année à l'ENSIMAG, à Grenoble et à l'INPGI, à Grenoble),
T. Soro (3ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
N. Tardy (M2 MdA à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),
T. Lejeune (Doctorant à Sorbonne Université, à Paris),
P. Revenant (Doctorant à l'ENS de Lyon, à Lyon),
D. Twigt (Doctorant à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),
D. Collignon (Chef de Département au Ministère de la Justice/SG/DIR-SG Sud-Est, à Aix-en-Provence),
N. Didrit (Professeur de Mathématiques et Informatique au Lycée La Salle-Passy Buzenval, à Rueil-Malmaison),
Q. Granier (Master au Technische Universität München, à Munich, 5ème année à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette),
V. Lefèvre (Chargé de recherche Inria au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon),
C. Lemonnier (Professeure agrégée de mathématiques au Lycée Marguerite de Navarre, à Alençon),
A. Lucazeau (Ingénieure, à Sidney),
H. A. Mai (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
T. Ravary (Enseignant au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau),
C. Romon (Retraité, à Carrières-sur-Seine),
P. Rousseau (Professeur en CPGE au Lycée Marie Curie, à Versailles),
l'équipe formée par M. Fourcade (Tle au Lycée Bossuet-Notre-Dame, à Paris), P. Gallois (1ère au Lycée Louis-le-Grand, à Paris) et G. Lacapelle (Tle au Lycée Notre-Dame de Sion, à Paris),
l'équipe formée par C. Portes (Tle au Lycée Saint Erembert, à Saint-Germain-en-Laye) et E. Ray (Tle au Lycée Saint Erembert, à Saint-Germain-en-Laye),
l'équipe formée par A. Dusoulier (MPSI au Lycée Louis-le-Grand, à Paris) et N. Ismaaili Erny (MPSI au Lycée Louis-le-Grand, à Paris),
l'équipe formée par D. Demirer (LDD1 informatique-mathématiques à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et B. Kunur (LDD1 mathématiques-économie à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),
l'équipe formée par D. Akproh (1ère bachelor au York University, à Toronto) et S. Bakayoko (Ingénieur diplômé à l'Ecole Royale Militaire, à Bruxelles),
l'équipe formée par A. Duchemin (L3 à l'ENS, à Paris) et A. Tosel (L3 à l'ENS, à Paris),

l'équipe formée par J. Clément-Cottuz (Doctorant à l'Université de Rouen, à Rouen) et L. Vanhaelewyn (M2 Mathématiques à Sorbonne Université, à Paris),
l'équipe formée par M. Baccara (Doctorant au CMAP, à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), S. Baumert (Enseignant au lycée, à Paris) et J. Ishak (Doctorante au LAGA, à l'Université Sorbonne Paris Nord, à Villetaneuse),
l'équipe formée par N. Brigouleix (Enseignant au Lycée Colbert, à Paris) et V. de Daruvar (Enseignant au Lycée Charlemagne, à Paris),
l'équipe formée par I. Leskevich (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), A. Matveeva (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau) et F. Petranovskii (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau).

université PARIS-SACLAY
FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY
FMJH FONDATION MATHÉMATIQUE JACQUES HADAMARD
cnrs