Marathon d'Orsay de Mathématiques

Résultats de la première vague de septembre 2018

Voici les solutions des premiers problèmes, avec les noms des participants qui ont fourni une solution correcte.

Solution du problème 1 : Soit A la position de la petite aiguille lorsque Anne commence à travailler ; on sait que A est entre les chiffres 7 et 8. Soit B la position de la petite aiguille lorsque Anne a résolu le problème ; on sait que B est entre les chiffres 8 et 9. Appelons O le centre de l'horloge. La petite aiguille parcourt l'angle aigu $\widehat{AOB}$ durant la résolution du problème. Pendant ce temps, la grande aiguille passe de B à A. Vu la position de A et de B, Anne commence à travailler entre 19h40 et 19h45, et finit entre 20h35 et 20h40. Le temps de résolution est donc un peu inférieur à une heure, et la grande aiguille fait un peu moins d'un tour d'horloge pour passer de B à A. Par conséquent, elle parcourt un angle de $360° - \widehat{AOB}$. Comme la grande aiguille avance 12 fois plus vite que la petite aiguille, on a : $12 \times \widehat{AOB} = 360° - \widehat{AOB}$. Donc $\widehat{AOB} = \frac{1}{13}360° = 27,692°$. Comme la petite aiguille parcourt $\frac{1}{12}360° = 30°$ en une heure, Anne met $\frac{27,692}{30}$h pour résoudre le problème, c'est-à-dire 55 minutes et 23 secondes.

Ont fourni une solution correcte : J. Legrand (2nde au Lycée Descartes, Montigny le Bretonneux), A. Bigot (1ère S au Lycée Notre Dame du Grandchamp, Versailles), A. Corbineau (1ère S au Lycée Saint Charles, Athis-Mons), A. Delmotte (1ère S au Lycée Corneille, La Celle-Saint-Cloud), C. Lamy (1ère S au Lycée Léonard de Vinci, Saint Michel sur Orge), C.-M. Stucki (1ère S au Lycée Notre Dame du Grandchamp, Versailles), A. Bonnet (Tle S au Lycée Michelet, Vanves), T. Boquet (Tle S au Lycée Louis Bascan, Rambouillet), E. Bourroux (Tle S au Lycée Saint-Louis Saint-Clément, Viry-Chatillon), J. de Sainte Marie (Tle S au Lycée Blaise Pascal, Orsay), N. Déhais (Tle S au Lycée Blaise Pascal, Orsay), A. Diallo (Tle S au Lycée Descartes, Montigny le Bretonneux), S. Kerbourc'h (Tle S au Lycée Michelet, Vanves), Séb. Mion (Tle S au Lycée Lakanal, Sceaux), Sylv. Mion (Tle S au Lycée Lakanal, Sceaux), T. Vargenau (Tle S au Lycée René Cassin, Arpajon), I. Vulcanescu (Tle S au Lycée Saint-Louis Saint-Clément, Viry-Chatillon), A. Adala (L1 MPI à l'Université Paris-Sud, Orsay), A. Durand (L3 maths à l'Université Paris-Sud, Orsay), L. Moulin (L3 MFA + magist. à l'Université Paris-Sud, Orsay), D. Girault (M1 MF + magist. à l'Université Paris-Sud, Orsay), D. Albertin (M2 maths-info à l'Université Paris-Est, Marne-la-Vallée), Q. Manière (M2 LMFI à l'Université Paris-Diderot, Paris), A. Napame (M2 agreg à l'Université Paris-Sud, Orsay), B. Duvocelle (doctorant à la School of business and economics, Maastricht University), C. Moulin (doctorante à l'Université Paris-Sud, Orsay), D.-L. Vu (doctorant à l'Institut de Physique Théorique du CEA, Gif-sur-Yvette), T. Demoulin (Prof maths au Lycée Branly, Amiens), C. Lemonnier (Prof agrégée au Lycée Le Verrier, Saint-Lô), L. Servolle (en poste à la DGA–Ministère de la Défense, Versailles).

Solution du problème 2 : Comme Finn occupe 21 fois une tourelle, le poste de pilotage est occupé 21 fois par Rey ou Chewie. Comme ce dernier l'occupe 8 fois, Rey est au poste de pilotage 21-8=13 fois. Comme Rey est dans une tourelle 12 fois, il y a au total 12+13=25 chasseurs détruits. Vu la règle de permutation des places, il est impossible d'occuper le poste de pilotage 2 fois consécutives. Rey commence donc au poste de pilotage, puis alterne à chaque chasseur détruit entre une tourelle et le poste de pilotage. En particulier, elle détruit 12 chasseurs sur 25. D'autre part, comme Chewie va 8 fois au poste de pilotage, il détruit au moins 8 chasseurs (peut-être 9, si c'est lui qui détruit le dernier). Quant à Finn, il va 25-21=4 fois au poste de pilotage et détruit donc 4 ou 5 chasseurs. C'est ce raisonnement que suit Leia pour deviner que Rey a détruit le plus grand nombre de chasseurs ennemis.

Ont fourni une solution correcte : J. Legrand (2nde au Lycée Descartes, Montigny le Bretonneux), A. Bigot (1ère S au Lycée Notre Dame du Grandchamp, Versailles), A. Corbineau (1ère S au Lycée Saint Charles, Athis-Mons), A. Delmotte (1ère S au Lycée Corneille, La Celle-Saint-Cloud), F. Gérard (1ère S au Lycée Notre Dame du Grandchamp, Versailles), C. Lamy (1ère S au Lycée Léonard de Vinci, Saint Michel sur Orge), E. Bourroux (Tle S au Lycée Saint-Louis Saint-Clément, Viry-Chatillon), J. de Sainte Marie (Tle S au Lycée Blaise Pascal, Orsay), N. Déhais (Tle S au Lycée Blaise Pascal, Orsay), A. Diallo (Tle S au Lycée Descartes, Montigny le Bretonneux), L. Duhem (Tle S au Lycée Nikola Tesla, Dourdan), Séb. Mion (Tle S au Lycée Lakanal, Sceaux), Sylv. Mion (Tle S au Lycée Lakanal, Sceaux), L. Rodrigues (Tle S au Lycée des Loges, Evry), T. Vargenau (Tle S au Lycée René Cassin, Arpajon), L. Moulin (L3 MFA + magist. à l'Université Paris-Sud, Orsay), D. Girault (M1 MF + magist. à l'Université Paris-Sud, Orsay), D. Albertin (M2 maths-info à l'Université Paris-Est, Marne-la-Vallée), M. Farid (M2 modélisation aléatoire à l'Université Paris-Diderot, Paris), A. Lucazeau (M2 MEEF à l'Ecole Supérieure de Professorat et d'Education, Caen), Q. Manière (M2 LMFI à l'Université Paris-Diderot, Paris), A. Napame (M2 agreg à l'Université Paris-Sud, Orsay), B. Duvocelle (doctorant à la School of business and economics, Maastricht University), C. Moulin (doctorante à l'Université Paris-Sud, Orsay), D.-L. Vu (doctorant à l'Institut de Physique Théorique du CEA, Gif-sur-Yvette), T. Demoulin (Prof maths au Lycée Branly, Amiens), C. Lemonnier (Prof agrégée au Lycée Le Verrier, Saint-Lô), L. Servolle (en poste à la DGA–Ministère de la Défense, Versailles).

Solution du problème 3 : Le nombre 101 est premier, mais aucun autre nombre de cette collection n'est premier. En effet, d'une part tous les nombres comportant un nombre pair de chiffres 1 sont des multiples de 101. D'autre part, le nombre comportant $2k+1$ chiffres 1 s'écrit $1+100+100^2+\ldots+100^{2k} = \frac{100^{2k+1}-1}{100-1} = \frac{10^{2k+1}-1}{9}\frac{10^{2k+1}+1}{11}$. Ce nombre est donc le produit de deux fractions qui sont chacune un nombre entier : d'abord $10^{2k+1}-1$ est le nombre composé de $2k+1$ chiffres 9 et est donc divisible par 9 ; ensuite $10^{2k+1}+1-11 = 10(10^{2k}-1)$ est le nombre composé de $2k$ chiffres 9 puis d'un 0 et est ainsi divisible par 99, donc par 11.

Ont fourni une solution correcte : A. Corbineau (1ère S au Lycée Saint Charles, Athis-Mons), A. Bonnet (Tle S au Lycée Michelet, Vanves), C. Boricaud (M1 MF + magist. à l'Université Paris-Sud, Orsay), D. Girault (M1 MF + magist. à l'Université Paris-Sud, Orsay), D. Albertin (M2 maths-info à l'Université Paris-Est, Marne-la-Vallée), M. Farid (M2 modélisation aléatoire à l'Université Paris-Diderot, Paris), A. Lucazeau (M2 MEEF à l'Ecole Supérieure de Professorat et d'Education, Caen), Q. Manière (M2 LMFI à l'Université Paris-Diderot, Paris), B. Duvocelle (doctorant à la School of business and economics, Maastricht University), C. Moulin (doctorante à l'Université Paris-Sud, Orsay), D.-L. Vu (doctorant à l'Institut de Physique Théorique du CEA, Gif-sur-Yvette), C. Lemonnier (Prof agrégée au Lycée Le Verrier, Saint-Lô), L. Servolle (en poste à la DGA–Ministère de la Défense, Versailles).

Solution du problème 4 : Un empilement très compact des 9 ballons est obtenu en plaçant les centres de 8 ballons aux sommets d'un cube, puis le dernier ballon au centre de ce cube et tangent aux 8 autres ballons. Dans ce cas, la diagonale de ce cube vaut 2 diamètres, soit 40cm. Le côté de ce cube a donc pour longueur $\frac{40}{\sqrt{3}}$cm. Le cube circonscrit à cet arrangement de ballons a ses côtés de longueur 1 diamètre plus grande que le cube ci-dessus. Une boîte cubique de côté $20+\frac{40}{\sqrt{3}} \simeq 43,094$cm peut donc contenir les 9 ballons. Il faut encore montrer que l'on ne peut pas utiliser une boîte plus petite, et la plupart des participants n'ont pas fourni d'argument pour cela. Considérons un cube C ayant le même centre que la boîte et ayant des côtés de longueur 1 diamètre de moins que ceux de la boîte. Par construction, C doit contenir les 9 centres des ballons. Découpons C par les plans médiateurs de ses arêtes en 8 cubes de côtés 2 fois plus petits. Puisqu'il y a 9 centres dans 8 cubes, l'un de ces cubes au moins contient 2 centres. Comme ces centres doivent être distants d'au moins 1 diamètre, la grande diagonale des petits cubes doit valoir au moins 1 diamètre. Donc la diagonale de C doit valoir au moins 2 diamètres, et le même calcul que ci-dessus montre que les côtés de la boîte sont de longueur au moins $20+\frac{40}{\sqrt{3}}$cm.

Ont fourni une solution correcte : A. Delmotte (1ère S au Lycée Corneille, La Celle-Saint-Cloud), C. Meyer-Hilfiger (L3 MFA + magist. à l'Université Paris-Sud, Orsay), L. Moulin (L3 MFA + magist. à l'Université Paris-Sud, Orsay), D. Girault (M1 MF + magist. à l'Université Paris-Sud, Orsay), Q. Manière (M2 LMFI à l'Université Paris-Diderot, Paris), B. Duvocelle (doctorant à la School of business and economics, Maastricht University), D.-L. Vu (doctorant à l'Institut de Physique Théorique du CEA, Gif-sur-Yvette).