Marathon d'Orsay de Mathématiques

Septembre 2019

Le Marathon d'Orsay de Mathématiques est une activité mathématique et ludique qui vous est proposée en dehors de tout cadre d'études. Vous trouverez quelques problèmes de mathématiques ci-dessous. Leur résolution ne relève pas de l'application de recettes enseignées dans des cours avancés, mais nécessite plutôt une réflexion approfondie et une adaptation aux situations nouvelles.

Pour résoudre ces problèmes correctement, il vous est demandé de justifier très soigneusement vos réponses, comme dans une démonstration. Vos solutions peuvent être envoyées par la poste (voir l'adresse sur http ://www.math.u-psud.fr/marathon), par email à `marathon.orsay@math.u-psud.fr` ou déposées dans une boîte en carton prévue à cet effet au rez-de-chaussée du bâtiment 307, dans la salle des casiers à courrier située à droite du grand hall, juste après avoir franchi l'entrée principale.

Si vous répondez à plusieurs problèmes, il vous est demandé de le faire sur des feuilles séparées. Toutes les solutions doivent nous parvenir au plus tard le **vendredi 18 octobre 2019 à 14h**. Les solutions reçues tardivement ne seront plus prises en considération. Merci d'indiquer clairement votre nom, prénom, année d'études (ou statut), établissement, ville et adresse email (pour recevoir les problèmes suivants). Ceux qui souhaitent recevoir les énoncés des problèmes suivants sans fournir de solutions pour les problèmes ci-dessous, peuvent le demander à l'adresse email ci-dessus.

Les noms de ceux ayant fourni une solution correcte seront listés lors de la parution des problèmes suivants. Tous les participants ayant résolu au moins un problème durant l'année 2019-2020 seront invités à la grande remise des prix à Orsay en fin d'année.

Problème 1 (semi et complet)

Emma participe à un jeu télévisé afin de gagner un prix qui est caché derrière l'une des trois portes fermées face à elle. Elle peut demander à l'animateur si le prix est derrière la première porte, ou si il est derrière la troisième porte. Elle peut poser chacune de ces deux questions à plusieurs reprises et dans l'ordre de son choix. A chaque fois, l'animateur répondra par oui ou non, mais il a le droit de mentir au maximum 2 fois. Emma doit annoncer au début du jeu combien de questions elle va poser, mais elle pourra choisir ces questions en fonction des réponses déjà reçues. En contrepartie, pour chaque question annoncée, la valeur du prix est réduite de 5%.
Combien de questions Emma doit-elle annoncer au minimum, pour être certaine de pouvoir déterminer où se trouve le prix ?

Problème 2 (semi et complet)

Pour tromper son ennui entre deux saisons du Marathon d'Orsay de Mathématiques, Lucas s'intéresse à des objets mathématiques un peu étranges. Cette fois, il s'est inventé la notion de fonction *pentacroyable* : une telle fonction f associe un nombre réel $f(P)$ à chaque point P du plan, de sorte que pour tout pentagone régulier $ABCDE$ (ayant des côtés de longueur strictement positive), on ait

$$f(A) + f(B) + f(C) + f(D) + f(E) = 0.$$

Comme le Marathon vient de redémarrer, aidez Lucas à vite terminer son passe-temps en montrant que la seule fonction pentacroyable est la fonction nulle.

Problème 3 (complet)

Manon choisit un nombre entier strictement positif N. Elle tire ensuite au hasard un entier entre 1 et N (avec la même probabilité pour chacun) et soustrait cet entier du nombre N, afin d'obtenir un nouveau nombre N' plus petit. Manon recommence cette procédure de soustraction aléatoire en tirant cette fois au hasard un entier entre 1 et N', et ainsi de suite jusqu'à obtenir 0.
Combien de soustractions seront nécessaires en moyenne pour y arriver ?

Problème 4 (complet)

Camille s'amuse à noircir certaines cases d'une grille $4 \times n$ (où n est un entier strictement positif), composée de cases carrées blanches, au moyen d'un crayon à papier. Il ne s'arrête de noircir des cases que lorsque chaque case restée blanche a au moins un côté en commun avec une case noircie.
Montrer que Camille a noirci au moins n cases.

UNIVERSITÉ PARIS SUD
université PARIS-SACLAY
Fondation mathématique FMJH Jacques Hadamard
cnrs