Marathon d'Orsay de Mathématiques

Résultats de la première vague de septembre 2019

Voici les solutions des premiers problèmes, avec les noms des participants qui ont fourni une solution correcte.

Solution du problème 1 : Emma peut trouver la bonne porte avec 8 questions. Elle commence par répéter la question sur la première porte jusqu'à obtenir 3 fois la même réponse (qui sera donc la vérité). Si le présenteur ment n fois durant cette salve de questions, cela utilise $n + 3$ questions. Si le prix n'est pas derrière cette porte, Emma répète ensuite la question sur la troisième porte jusqu'à obtenir à nouveau 3 fois la même réponse (qui sera encore la vérité). Comme le présentateur ne peut plus mentir que $2 - n$ fois, cela se produit après au plus $5 - n$ questions. Emma sait alors avec certitude où se trouve le prix, et a posé $n + 3 + 5 - n = 8$ questions.
Mais 7 questions ne suffiront pas à Emma si le présentateur applique la stratégie suivante : il répond "non" à toutes les questions tant qu'une même question n'a pas été posée 3 fois. Si la première question à revenir pour la troisième fois concerne la première porte (le cas où c'est la troisième porte est semblable), et que par malchance le prix n'est pas derrière cette porte, le présentateur continue à dire la vérité concernant cette porte en disant "non". Lorsqu'il est interrogé sur la troisième porte, le présentateur répond "non" les deux premières fois (comme on l'avait dit précédemment), puis par "oui" les deux fois suivantes (de sorte qu'il ne ment que 2 fois en tout). Mais il peut répondre ainsi que le prix soit derrière la troisième porte ou non, de sorte qu'Emma ne peut découvrir la vérité avec seulement $3 + 4 = 7$ questions.
Pour tenter de montrer que 7 questions ne suffisent pas à Emma, de nombreux participants se sont limités à étudier le cas où Emma pose d'abord 3 questions consécutives concernant la première porte. Mais cela ne suffit pas pour décrire comment l'animateur peut utiliser ses 2 mensonges à bon escient si Emma décide de poser ses 7 questions dans un ordre différent.

Ont fourni une solution correcte : A. Crovisier (2nde au Lycée Lakanal, à Sceaux), M. Billon (1ère S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Fourré (1ère S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), L. Fonteniaud (1ère SMP au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Jiao (1ère à l'Institut Notre-Dame, à Meudon), I. Misguich (1ère S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), G. Stoupy (1ère au Lycée Saint-Jean Hulst, à Vaucresson), L. Verhaeghe (1ère S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Plessias (Tle S à l'Institut Notre Dame, à Bourg-la-Reine), J. de Sainte Marie (MPSI au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), N. Déhais (MPSI au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), M. Delmas (L1 DL math info à l'Université Paris-Sud, à Orsay), S. Gruffaz (Master Jacques Hadamard IA à l'ENS Paris-Saclay, à Cachan), D. Girault (M2 AAG à l'Université Paris-Sud, à Orsay), L. Vuduc (M2 MSV à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), T. Demoulin (Professeur au Lycée Branly, à Amiens), C. Lemonnier (Professeure agrégée au Lycée Napoléon, à L'Aigle), P. Vernier (Professeur de maths au Lycée René Cassin, à Arpajon), M. Farid (Consultant chez Awalee Consulting, à Paris), C. Palamidessi (Directrice de recherches INRIA à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau).

Solution du problème 2 : Soit $A_1B_1C_1D_1E_1$ un pentagone régulier du plan. En lui faisant subir une rotation de centre A_1 et d'angle $2\pi/5$, on obtient un autre pentagone régulier $A_2B_2C_2D_2E_2$, avec $A_1 = A_2$. En appliquant la même rotation au nouveau pentagone obtenu, on obtient successivement $A_3B_3C_3D_3E_3$, $A_4B_4C_4D_4E_4$ et $A_5B_5C_5D_5E_5$, avec $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5$. Si f est pentacroyable, alors $f(A_i)+f(B_i)+f(C_i)+f(D_i)+f(E_i) = 0$ pour $i = 1, 2, 3, 4$ et 5. Remarquons que les pentagones $B_1B_2B_3B_4B_5$, $C_1C_2C_3C_4C_5$, $D_1D_2D_3D_4D_5$ et $E_1E_2E_3E_4E_5$ sont également réguliers, de sorte que $f(B_1) + f(B_2) + f(B_3) + f(B_4) + f(B_5) = 0$ et de même pour les points C_i, D_i et E_i. En additionnant les relations pour f correspondant aux 5 pentagones $A_iB_iC_iD_iE_i$ et en tenant compte des relations pour ces 4 derniers pentagones, on obtient donc que $f(A_1) + f(A_2) + f(A_3) + f(A_4)+f(A_5) = 5f(A_1) = 0$. Ceci montre que $f(A_1) = 0$ quel que soit le point A_1 du plan utilisé pour démarrer notre construction. Toute fonction pentacroyable est donc nulle.

Ont fourni une solution correcte : A. Fourré (1ère S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), L. Champignon (Tle S au Lycée Jean Vilar, à Plaisir), A. Corbineau (Tle S au Lycée Saint-Charles, à Athis-Mons), N. Déhais (MPSI au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), M. Delmas (L1 DL math info à l'Université Paris-Sud, à Orsay), N. Tokka (L3 MFA à l'Université Paris-Sud, à Orsay), A. Zidani (L3 MFA et magistère à l'Université Paris-Sud, à Orsay), M.-Y. Gueddari (2ème année à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette), D. Girault (M2 AAG à l'Université Paris-Sud, à Orsay), M. Farid (Consultant chez Awalee Consulting, à Paris).

Solution du problème 3 : Montrons par récurrence sur N que le nombre s_N de soustractions nécessaires en moyenne pour arriver à 0 est égal à $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N}$. Lorsque $N = 1$, Manon tirera forcément au hasard le nombre 1, de sorte qu'il faudra toujours exactement une soustraction pour arriver à 0, de sorte que $s_1 = 1$. Supposons maintenant correcte la formule pour s_{N-1}. En partant de N, Manon a une probabilité $\frac{1}{N}$ de tirer au hasard le nombre i, et d'obtenir après sa première soustraction le nombre $N - i$. Il lui faudra ensuite en moyenne s_{N-i} soustractions pour arriver à 0. Par conséquent, $s_N = \frac{1}{N}(1 + (s_1 + 1) + \ldots + (s_{N-1} + 1))$. La même relation pour s_{N-1} s'écrit $s_{N-1} = \frac{1}{N-1}(1 + (s_1 + 1) + \ldots + (s_{N-2} + 1))$, de sorte qu'en effectuant la substitution $1 + (s_1 + 1) + \ldots + (s_{N-2} + 1) = (N - 1)s_{N-1}$ dans la première égalité, on obtient $s_N = \frac{1}{N}((N - 1)s_{N-1} + (s_{N-1} + 1))$ ou encore $s_N = s_{N-1} + \frac{1}{N}$. Par l'hypothèse de récurrence, $s_{N-1} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{N-1}$, ce qui donne $s_N = 1 + \ldots + \frac{1}{N}$ comme souhaité.

Ont fourni une solution correcte : M. Billon (1ère S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Miller (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc), L. Champignon (Tle S au Lycée Jean Vilar, à Plaisir), N. Déhais (MPSI au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), M. Delmas (L1 DL math info à l'Université Paris-Sud, à Orsay), V. Djamei (L3 MFA à l'Université Paris-Sud, à Orsay), N. Tokka (L3 MFA à l'Université Paris-Sud, à Orsay), A. Zidani (L3 MFA et magistère à l'Université Paris-Sud, à Orsay), S. Gruffaz (Master Jacques Hadamard IA à l'ENS Paris-Saclay, à Cachan), D. Girault (M2 AAG à l'Université Paris-Sud, à Orsay), D. Albertin (doctorant au LIGM de l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée, à Champs-sur-Marne), T. Demoulin (Professeur au Lycée Branly, à Amiens), C. Lemonnier (Professeure agrégée au Lycée Napoléon, à L'Aigle), P. Vernier (Professeur de maths au Lycée René Cassin, à Arpajon), M. Farid (Consultant chez Awalee Consulting, à Paris).

Solution du problème 4 : Soit b_i le nombre de cases noircies dans la $i$ème colonne, pour $i = 1, \ldots, n$ et posons $b_0 = b_{n+1} = 0$. Remarquons que pour $1 \leq i \leq n$, si $b_i = 0$ alors $b_{i-1} + b_{i+1} \geq 4$ pour que les cases de la $i$ème colonne aient une voisine qui soit noircie. On répartit alors les colonnes en groupes de la manière suivante : si $b_i = 0$, alors on met dans le même groupe la $i$ème colonne avec la colonne voisine qui a le plus grand nombre de cases noires, ou la colonne de gauche en cas d'égalité. Ainsi, parmi deux colonnes adjacentes dans un même groupe, il y en a toujours exactement une qui ne compte aucune case noircie, et d'autre part une colonne sans case noircie n'est dans le même groupe qu'avec une seule de ses voisines. Par conséquent, les colonnes se retrouvent en groupes de 1, 2 ou 3 colonnes. En effet, si la colonne k est regroupée (entre autres) avec ses deux voisines, on a forcément $b_k > 0$ et donc $b_{k-1} = b_{k+1} = 0$, de sorte que les colonnes $k-2$ et $k+2$ ne font pas partie de ce groupe. Vérifions que chaque groupe de colonnes compte au moins une case noircie par colonne en moyenne, ce qui impliquera que la grille compte au moins n cases noircies. Si un groupe est constitué de la seule colonne i, on a $b_i > 0$ de sorte que $b_i \geq 1$ comme souhaité. Si un groupe est constitué des colonnes i et $i+1$, l'une des deux n'a aucune case noircie. Disons que c'est la colonne i (l'autre cas étant semblable), de sorte que $b_i = 0$ et $b_{i-1} + b_{i+1} \geq 4$. Comme la colonne $i+1$ est dans le même groupe que la colonne i, c'est que $b_{i+1} \geq b_{i-1}$ et donc $b_{i+1} \geq 2$ comme souhaité. Enfin, dans un groupe de 3 colonnes $i-1, i$ et $i+1$, on a vu que $b_{i-1} = b_{i+1} = 0$, ce qui implique $b_i \geq 2$ comme dans le cas précédent. Mais si $b_i = 2$, la relation $b_{i-2} + b_i \geq 4$ impliquerait que $b_{i-2} \geq b_i$ et donc que la colonne $i-1$ est dans le même groupe que la colonne $i-2$ et donc pas que la colonne i. Par conséquent, on doit avoir $b_i \geq 3$ comme souhaité.

Ont fourni une solution correcte : A. Fourré (1ère S au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Corbineau (Tle S au Lycée Saint-Charles, à Athis-Mons), A. Zidani (L3 MFA et magistère à l'Université Paris-Sud, à Orsay), S. Gruffaz (Master Jacques Hadamard IA à l'ENS Paris-Saclay, à Cachan), D. Girault (M2 AAG à l'Université Paris-Sud, à Orsay), D. Albertin (Doctorant au LIGM de l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée, à Champs-sur-Marne), P. Vernier (Professeur de maths au Lycée René Cassin, à Arpajon).