Marathon d'Orsay de Mathématiques

Septembre 2020

Le Marathon d'Orsay de Mathématiques est une activité mathématique et ludique qui vous est proposée en dehors de tout cadre d'études. Vous trouverez quelques problèmes de mathématiques ci-dessous. Leur résolution ne relève pas de l'application de recettes enseignées dans des cours avancés, mais nécessite plutôt une réflexion approfondie et une adaptation aux situations nouvelles.

Pour résoudre ces problèmes correctement, il vous est demandé de justifier très soigneusement vos réponses, comme dans une démonstration. Vos solutions peuvent être envoyées par la poste (voir l'adresse sur https ://www.imo.universite-paris-saclay.fr/marathon), par email à `marathon.orsay@math.u-psud.fr` ou déposées dans une boîte en carton prévue à cet effet au rez-de-chaussée du bâtiment 307, dans la salle des casiers à courrier située à droite du grand hall, juste après avoir franchi l'entrée principale.

Si vous répondez à plusieurs problèmes, il vous est demandé de le faire sur des feuilles séparées. Toutes les solutions doivent nous parvenir au plus tard le **lundi 19 octobre 2020 à 14h**. Les solutions reçues tardivement ne seront plus prises en considération. Merci d'indiquer clairement votre nom, prénom, année d'études (ou statut), établissement, ville et adresse email (pour recevoir les problèmes suivants). Ceux qui souhaitent recevoir les énoncés des problèmes suivants sans fournir de solutions pour les problèmes ci-dessous, peuvent le demander à l'adresse email ci-dessus.

Les noms de ceux ayant fourni une solution correcte seront listés lors de la parution des problèmes suivants. Tous les participants ayant résolu au moins un problème durant l'année 2020-2021 seront invités à la grande remise des prix à Orsay (ou par visioconférence si les circonstances ne nous le permettent pas encore) en fin d'année.

Problème 1 (semi et complet)

A l'issue de la dernière saison du Marathon d'Orsay de Mathématiques, Julie a remporté un livre sur les nombres premiers, c'est-à-dire les entiers supérieurs ou égaux à 2 et qui sont divisibles seulement par 1 et par eux-mêmes.
A la fin d'un chapitre, Julie découvre une énigme consistant à trouver tous les nombres premiers a, b et c tels que $ab + 7ac + 15c = abc$.
Comme Julie, résolvez cette énigme pour bien démarrer la nouvelle saison du Marathon !

Problème 2 (semi et complet)

Pendant les deux mois où ils sont restés chez eux, 100 lycéens ont utilisé des applications de messagerie afin de converser à distance. Chaque conversation n'implique que deux lycéens, qui ont choisi pour converser entre eux deux une application de messagerie parmi les 20 plus populaires. Chacune de ces applications a été choisie par au moins 210 paires de lycéens pour leurs conversations respectives.
Montrer que parmi ces 100 lycéens on peut en trouver un qui a utilisé au moins 5 applications de messagerie différentes pour converser avec ses amis.

Problème 3 (complet)

On dit qu'un nombre entier positif N est *épatant* si, quel que soit le chiffre d de 1 à 9, si on l'insère entre deux chiffres consécutifs dans l'écriture décimale de N, on obtient un entier qui est multiple de d.
Par exemple, en insérant le chiffre 5 entre toutes les paires de chiffres consécutifs de 1234, on obtient les entiers 15234, 12534 et 12354. Ainsi, 1234 n'est pas *épatant* puisque l'un de ces entiers (chacun d'entre eux, en fait) n'est pas divisible par 5.

Quel est le plus petit entier supérieur ou égal à 10 qui est *épatant* ?

Problème 4 (complet)

Quelles sont toutes les fonctions f réelles d'une variable réelle qui satisfont à l'équation

$$f(xf(x) + f(y)) = (f(x))^2 + y$$

quels que soient les nombres réels x et y ?

université PARIS-SACLAY
FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY
Fondation mathématique FMJH Jacques Hadamard
cnrs