# Marathon d'Orsay de Mathématiques

Septembre 2021

Le Marathon d'Orsay de Mathématiques est une activité mathématique et ludique qui vous est proposée en dehors de tout cadre d'études. Vous trouverez quelques problèmes de mathématiques ci-dessous. Leur résolution ne relève pas de l'application de recettes enseignées dans des cours avancés, mais nécessite plutôt une réflexion approfondie et une adaptation aux situations nouvelles.

Pour résoudre ces problèmes correctement, il vous est demandé de justifier très soigneusement vos réponses, comme dans une démonstration. Vos solutions peuvent être envoyées par la poste (voir l'adresse sur https ://www.imo.universite-paris-saclay.fr/marathon), par email à `marathon.math@universite-paris-saclay.fr` ou déposées à l'Institut de Mathématique d'Orsay dans une boîte en carton prévue à cet effet au rez-de-chaussée du bâtiment 307, dans la salle des casiers à courrier située à droite du grand hall, juste après avoir franchi l'entrée principale.

Si vous répondez à plusieurs problèmes, il vous est demandé de le faire sur des feuilles séparées. Toutes les solutions doivent nous parvenir au plus tard le **lundi 18 octobre 2021 à 14h**. Les solutions reçues tardivement ne seront plus prises en considération. Merci d'indiquer clairement votre nom, prénom, année d'études (ou statut), établissement, ville de cet établissement et adresse email (pour recevoir les problèmes suivants). Ceux qui souhaitent recevoir les énoncés des problèmes suivants sans fournir de solutions pour les problèmes ci-dessous, peuvent le demander à l'adresse email ci-dessus.

Les noms de ceux ayant fourni une solution correcte seront listés avec la solution officielle avant la parution des problèmes suivants. Tous les participants ayant résolu au moins un problème durant l'année 2021-2022 seront invités à la grande remise des prix à Orsay (ou par visioconférence si les circonstances ne nous le permettent pas encore) en fin d'année.

## Problème 1 (semi et complet)

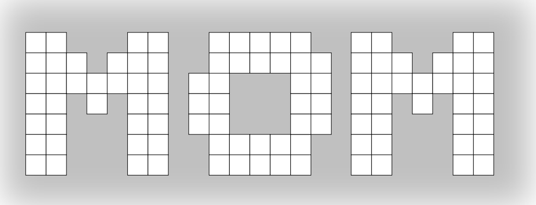
Pour s'occuper en attendant le redémarrage du Marathon d'Orsay de Mathématiques, Judith s'amuse avec une grille de $21 \times 21$ cases. Elle écrit un nombre entier strictement positif dans chaque case, en respectant la règle que deux cases adjacentes (avec un côté commun) contiennent des entiers consécutifs (qui diffèrent de 1). Une fois le remplissage de la grille achevé, Judith constate qu'il y a exactement deux cases contenant le nombre 3 et exactement deux cases contenant le nombre 41.
Combien de fois le nombre 22 peut-il figurer dans sa grille ?

## Problème 2 (semi et complet)

Comme plusieurs de ses amies, Amalia s'est préparée en essayant de résoudre le premier problème du Marathon d'Orsay de Mathématiques de l'année dernière. Celui-ci concernait les nombres premiers, c'est-à-dire les entiers supérieurs ou égaux à 2 qui sont divisibles seulement par 1 et par eux-mêmes.
Testez l'efficacité de cet entraînement en trouvant, preuve à l'appui, quels sont tous les nombres premiers $a$ et $b$ tels que le nombre $a^b + b^a$ soit lui aussi premier.

## Problème 3 (complet)

Augustin et Bastien découpent dans une grande feuille quadrillée, en suivant précisément les bords des petits carreaux, afin d'en extraire une aire de jeu constituée de 101 petits carreaux. Cette aire de jeu peut être formée de plusieurs morceaux, qui peuvent chacun comporter des trous ou non (comme l'illustre l'exemple ci-dessous). Ils y jouent alors au jeu suivant : Augustin joue en premier et peut tracer une croix dans le petit carreau de son choix. Ensuite, chacun à son tour trace une croix dans un petit carreau encore vide mais adjacent (ayant un côté commun) avec le dernier carreau dans lequel une croix a été tracée. Le gagnant est le dernier joueur qui peut tracer une croix en respectant cette règle.
L'un des deux amis peut-il adopter une stratégie lui permettant de remporter la victoire à coup sûr ?



## Problème 4 (complet)

La petite Astrid s'amuse avec quelques objets appartenant à ses parents. Sur la surface d'un ballon de handball (que l'on assimile à une sphère parfaite de diamètre 18cm), elle dépose trois fins bracelets en métal (assimilés à des cercles de diamètre 9cm), de sorte que les bracelets soient tangents deux à deux. Ensuite, elle dépose une bague (également assimilée à un cercle, mais plus petit que les bracelets) sur la surface du ballon dans le petit espace entre les trois bracelets. Astrid s'émerveille que la bague soit tout juste tangente à chacun des bracelets.
Quel est le diamètre de cette bague ?