Marathon d'Orsay de Mathématiques

Résultats de la première vague de septembre 2021

Voici les solutions des premiers problèmes, avec les noms des participants qui ont fourni une solution correcte.

Solution du problème 1 : Soit (i, j) la case dans la $i$ème ligne et la $j$ème colonne, et soit $N_{i,j}$ l'entier écrit dans cette case. Pour se déplacer de la case (i, j) à la case (k, ℓ), il faut au minimum $|i - k|$ déplacements verticaux entre cases adjacentes et $|j - \ell|$ déplacements horizontaux entre cases adjacentes, de sorte que $|N_{i,j} - N_{k,\ell}| \leq |i - k| + |j - \ell|$. Les cases les plus éloignées entre elles sont des coins opposés, qui sont écartés de 40 déplacements. Comme $41 - 3 = 38$, les 4 nombres donnés doivent se trouver dans des carrés 2×2 situés dans les coins de la grille. Quitte à tourner la grille, on peut supposer qu'un des nombres 3 est dans un carré 2×2 en haut à gauche. Alors les nombres 41 sont dans un carré 2×2 en bas à droite, et le 2ème nombre 3 est aussi en haut à gauche. Les nombres 3 ne peuvent être adjacents et sont donc en cases $(1, 1)$ et $(2, 2)$, ou bien en cases $(1, 2)$ et $(2, 1)$. Mais seule la case $(21, 21)$ est à distance au moins 38 de la case $(2, 2)$: pas assez pour placer les 2 nombres 41, donc les nombres 3 sont dans les cases $(1, 2)$ et $(2, 1)$. De même, les nombres 41 sont dans les cases $(20, 21)$ et $(21, 20)$. Comme ces paires de cases sont écartées d'exactement 38 déplacements, $N_{i,j}$ doit augmenter de 1 chaque fois que i ou j augmente de 1, de sorte que $N_{i,j} = i + j$ (sauf éventuellement dans les coins $(1, 1)$ et $(21, 21)$). Les cases avec $N_{i,j} = 22$ sont donc $(i, 22 - i)$ pour $i = 1, \ldots, 21$, de sorte que le nombre 22 figure exactement 21 fois dans la grille.

Ont fourni une solution correcte : L. Choné (3ème au Collège Evariste Galois, à Bourg-la-Reine), L. Chareyron-Gretz (1ère au Lycée Saint-Michel de Picpus, à Saint-Mandé), S. Aidan (Tle au Lycée Henri-IV, à Paris), M. Camus (Tle au Lycée Louis-le-Grand, à Paris), A. Duchemin (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), P. Texier-Bourrouilh (Tle au Lycée Jean-Baptiste Say, à Paris), L. Doué (MPSI au Lycée Louis Pasteur, à Neuilly-sur-Seine), S. Meziane (MPSI au Lycée Louis-le-Grand, à Paris), S. Gvozdić (L1 maths-info à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), C. Bernet (MP* au Lycée Louis-le-Grand, à Paris), A. Bonvalet (1ère année à l'ENS, à Paris), C. Daignan Fornier de Lachaux (1ère année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), N. Déhais (L3 maths + magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), T. Lejeune (M1 à l'ENS, à Paris), S. Perrin-Roussel (M2 maths fonda à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette), A. Zidani (M2 AAG à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), B. Goujaud (doctorant à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), R. Khanfir (doctorant à Sorbonne Université, à Paris), J. Muller (doctorant au LAGA -Institut Galilée, à l'Université Sorbonne Paris Nord, à Villetaneuse), D. Collignon (attaché statisticien hors classe au département informatique et télécommunications pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), D. H. Le (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon), C. Lemonnier (professeure au Collège Yves Montand, à Val-au-Perche), C. Romon (secrétaire général de la Mission interministérielle pour la qualité des constructions publiques, à La Défense), l'équipe formée par L. Enderli (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc), I. Israël (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc) et E. Van Der Rest (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc), l'équipe formée par D. Arbulu Sedano (L3 info à Sorbonne Université, à Paris), M. Baccara (1ère année à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, à Paris) et

S. Baumert (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris), l'équipe formée par S. Bakayoko (3ème année ingénieur à l'Ecole Royale Militaire, à Bruxelles) et N. E. Polneau (1ère année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), l'équipe formée par P. Boisseau (M2 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et M. Vermeil (M2 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), l'équipe formée par E. Bonnafoux (doctorant au CMLS, à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), A. Gautier (doctorante à l'Université de Berne, à Berne) et A.-B. Ulusoy (doctorant au LIX, à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), l'équipe formée par E. Monard (3ème année à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette) et P.-A. Monard (colleur en CPGE au Lycée Stanislas, à Paris).

Solution du problème 2 : Remarquons que a et b ne peuvent être tous les deux pairs ou tous les deux impairs, sinon $a^b + b^a$ sera pair et au moins égal à $2^2 + 2^2 = 8$, donc pas premier. Supposons donc que a est pair (donc $a = 2$) et que b est impair. On voit que $b = 3$ convient car $2^3 + 3^2 = 17$ est premier. En revanche, aucun nombre impair $b > 3$ ne convient car $2^b + b^2$ est alors un multiple de 3 plus grand que 17, donc pas premier. En effet, le nombre premier $b > 3$ est de la forme $3k + 1$ ou $3k + 2$ (avec k entier) de sorte que b^2 est de la forme $3(3k^2 + 2k) + 1$ ou $3(3k^2 + 4k + 1) + 1$ donc de la forme $3\ell + 1$ (avec ℓ entier). Par ailleurs, on montre par récurrence que 2^b avec b impair est de la forme $3m + 2$ (avec m entier) : d'une part, $2^1 = 3 \cdot 0 + 2$ et d'autre part, si $2^b = 3m + 2$ alors $2^{b+2} = 3(4m + 2) + 2$. Donc $2^b + b^2$ est de la forme $3\ell + 1 + 3m + 2 = 3(\ell + m + 1)$, c'est-à-dire divisible par 3 comme annoncé.
Les seuls nombres premiers qui conviennent sont donc 2 et 3, de sorte que $a = 2$ et $b = 3$ ou bien $a = 3$ et $b = 2$.

Ont fourni une solution correcte : L. Choné (3ème au Collège Evariste Galois, à Bourg-la-Reine), O. Parisot (2nde au Lycée de l'ensemble Sainte-Marie, à Créteil), B. Bala (1ère au Lycée Camille Claudel, à Pontault-Combault), L. Chareyron-Gretz (1ère au Lycée Saint-Michel de Picpus, à Saint-Mandé), J. Coulombel (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc), P. Duvivier (1ère au Lycée René Cassin, à Arpajon), A. Fortin (1ère au Lycée Notre Dame les Oiseaux, à Verneuil sur Seine), C. Hebey (1ère au Lycée Charlemagne, à Paris), J. Hoarau (1ère au Lycée Sonia Delaunay, à Villepreux), T. Hollender (1ère SMP au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A.-P. Poudade (1ère au Lycée Louis-le-Grand, à Paris), Y. Sepulchre (1ère au Lycée François-Joseph Talma, à Brunoy), S. Aidan (Tle au Lycée Henri-IV, à Paris), M. Camus (Tle au Lycée Louis-le-Grand, à Paris), B. Daudin Clavaud (Tle au Lycée Henri-IV, à Paris), A. Duchemin (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), C. El Khemsani (Tle au Lycée Victor Hugo, à Marrakech), L. Fatah (Tle au Lycée Jeanne d'Arc, à Argentan), T. Ginoux-Defermon (Tle au Lycée Lakanal, à Sceaux), Q. Langé (Tle au Lycée Saint Louis, à Saumur), V. Le Febvre de Nailly (Tle au Lycée Sainte-Ursule, à Paris), O. Lemoine (Tle au Lycée Marguerite Yourcenar, à Morangis), A. Mathys (Tle au Lycée Edmond Michelet, à Arpajon), C. Regnier (Tle à l'Institut Montalembert, à Nogent-sur-Marne), P. Texier-Bourrouilh (Tle au Lycée Jean-Baptiste Say, à Paris), H. Chalandon-Goskrzynski (MPSI à l'Optimal, à Paris), T. Charles (MPSI au Lycée du Parc, à Lyon), L. Doué (MPSI au Lycée Louis Pasteur, à Neuilly-sur-Seine), S. Meziane (MPSI au Lycée Louis-le-Grand, à Paris), S. Sola (MPSI au Lycée du Parc, à Lyon), M. Bohère (L1 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), S. Gvozdić (L1 maths-info à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), C. Bernet (MP* au Lycée Louis-le-Grand, à Paris), C. Bourotte (MP2I au Lycée Fénelon Sainte-Marie, à Paris), C. B. Koudou (L2 math à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), A. Bonvalet (1ère année à l'ENS, à Paris), J. Clement-Cottuz (1ère année à l'ENSIMAG, à Saint-Martin-d'Hères), C. Daignan Fornier de Lachaux (1ère année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), N. Déhais (L3 maths + magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), S. Lahaye (L3 maths + magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), J. Namazi (1ère année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), A. Prevost

(L3 maths + magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), T. Lejeune (M1 à l'ENS, à Paris), A. Ellouze (3ème année à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, à Paris), S. Perrin-Roussel (M2 maths fonda à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette), A. Zidani (M2 AAG à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), B. Goujaud (doctorant à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), R. Khanfir (doctorant à Sorbonne Université, à Paris), J. Muller (doctorant au LAGA -Institut Galilée, à l'Université Sorbonne Paris Nord, à Villetaneuse), B. Berached (ingénieur informaticien, à Massy), D. Collignon (attaché statisticien hors classe au département informatique et télécommunications pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), G. Dietrich (professeur de maths et d'info en CPGE au Lycée Bellevue, à Toulouse), G. Dubost (enseignant au Lycée Henri-IV, à Paris), M. Farid (consultant chez Awalee Consulting, à Paris), H. Jallouli (analyste quantitatif chez Citi Bank, à Londres), D. H. Le (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon), C. Lemonnier (professeure au Collège Yves Montand, à Val-au-Perche), A. Lucazeau (professeure de mathématiques, à Rennes), Y. Naouz (ingénieur, à Paris), C. Romon (secrétaire général de la Mission interministérielle pour la qualité des constructions publiques, à La Défense), l'équipe formée par A. Anghel (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Bouziane (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc) et A. Choné (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc), l'équipe formée par L. Enderli (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc), I. Israël (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc) et E. Van Der Rest (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc), l'équipe formée par S. Arnoulx de Pirey (Tle au Lycée Saint Jean Hulst, à Versailles), A. de Capentier (Tle au Lycée Saint Jean Hulst, à Versailles) et E. de Pierrefeu (Tle au Lycée Saint Jean Hulst, à Versailles), l'équipe formée par E. Boudriga (Tle au Lycée Les Haberges, à Vesoul), B. Paoli (Tle au Lycée Les Haberges, à Vesoul) et T. Pequegnot (Tle au Lycée Les Haberges, à Vesoul), l'équipe formée par T. Gu (L1 maths-info à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et L. Zhang (L1 maths-info à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), l'équipe formée par F. Arous (L1 maths à l'Université de Paris, à Paris) et T. De Wolf (1ère année BASc à l'Université de Paris, à Paris et au Sciences Po, à Paris), l'équipe formée par D. Arbulu Sedano (L3 info à Sorbonne Université, à Paris), M. Baccara (1ère année à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, à Paris) et S. Baumert (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris), l'équipe formée par S. Bakayoko (3ème année ingénieur à l'Ecole Royale Militaire, à Bruxelles) et N. E. Polneau (1ère année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), l'équipe formée par J. Wang (M1 MFA à l'Université de Paris, à Paris), J. Wang (M1 MFA à l'Université de Paris, à Paris) et Z. Zhu (M1 MFA à l'Université de Paris, à Paris), l'équipe formée par P. Boisseau (M2 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et M. Vermeil (M2 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), l'équipe formée par E. Bonnafoux (doctorant au CMLS, à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), A. Gautier (doctorante à l'Université de Berne, à Berne) et A.-B. Ulusoy (doctorant au LIX, à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), l'équipe formée par E. Monard (3ème année à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette) et P.-A. Monard (colleur en CPGE au Lycée Stanislas, à Paris).

Solution du problème 3 : Augustin peut recourir à la stratégie suivante afin de s'assurer la victoire. Tout d'abord, au moins l'un des morceaux de l'aire de jeu contient un nombre impair de cases, puisqu'il y en a 101 au total. Il va tracer sa première croix dans ce morceau, concentrant ainsi tout le jeu dans ce morceau. Augustin place mentalement des dominos 2×1 sur ce morceau, de sorte que chaque domino recouvre exactement 2 carreaux sans recouvrir d'autre domino, et de manière à placer le plus grand nombre possible de dominos. Puisque le nombre de cases de ce morceau est impair, il restera au moins une case libre. Augustin y trace sa première croix. Chaque fois que Bastien trace une croix dans une case recouverte par un domino, Augustin trace la croix suivante dans l'autre case recouverte par ce domino. Bastien ne pourra jamais tracer de croix dans une case non recouverte par un domino, car le recouvrement par des dominos utilisé par Augustin maximise le nombre de ces dominos. Si $2k$ croix ont été tracées une fois que Bastien a tracé sa croix hors d'un domino, cela veut dire que les cases sous $k-1$ dominos contiennent une croix (il faut exclure la premiÃšre croix d'Augustin et la dernière croix de Bastien). Mais à la place de ces $k-1$ dominos, Augustin aurait pu placer k dominos, recouvrant chacun l'une de ses propres croix et la croix tracée juste après par Bastien. A la fin, comme Augustin pourra toujours tracer une croix après Bastien, c'est ce dernier qui n'arrivera plus à tracer de croix et qui perdra donc le jeu.

Ont fourni une solution correcte : S. Aidan (Tle au Lycée Henri-IV, à Paris), S. Gvozdić (L1 maths-info à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), T. Lejeune (M1 à l'ENS, à Paris), R. Khanfir (doctorant à Sorbonne Université, à Paris), J. Muller (doctorant au LAGA -Institut Galilée, à l'Université Sorbonne Paris Nord, à Villetaneuse), D. Collignon (attaché statisticien hors classe au département informatique et télécommunications pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), D. H. Le (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon), C. Romon (secrétaire général de la Mission interministérielle pour la qualité des constructions publiques, à La Défense), l'équipe formée par J. Wang (M1 MFA à l'Université de Paris, à Paris), J. Wang (M1 MFA à l'Université de Paris, à Paris) et Z. Zhu (M1 MFA à l'Université de Paris, à Paris), l'équipe formée par P. Boisseau (M2 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et M. Vermeil (M2 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), l'équipe formée par E. Bonnafoux (doctorant au CMLS, à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), A. Gautier (doctorante à l'Université de Berne, à Berne) et A.-B. Ulusoy (doctorant au LIX, à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), l'équipe formée par E. Monard (3ème année à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette) et P.-A. Monard (colleur en CPGE au Lycée Stanislas, à Paris).

Solution du problème 4 : Posons $\ell = 4,5$cm. Soit O le centre du ballon, O_1, O_2 et O_3 les centres des bracelets, et O_4 le centre de la bague. Considérons le plan OO_1O_2, qui contient aussi le point P_{12} de tangence entre les bracelets de centres O_1 et O_2. Comme tous les points d'un bracelet sont équidistants de O, le plan du bracelet de centre O_1 est orthogonal à la droite OO_1. En particulier, le triangle $OP_{12}O_1$ est rectangle en O_1, et $|OO_1|^2 = |OP_{12}|^2 - |P_{12}O_1|^2 = (2\ell)^2 - \ell^2$ de sorte que $|OO_1| = \sqrt{3}\ell$. D'autre part, l'angle $\widehat{P_{12}OO_1}$ mesure 30 degrés, donc l'angle $\widehat{O_2OO_1}$ mesure 60 degrés. Comme $|OO_1| = |OO_2|$, le triangle OO_1O_2 est équilatéral et $|O_1O_2| = \sqrt{3}\ell$.
D'autre part, par symétrie, le triangle $O_1O_2O_3$ est équilatéral et la droite OO_4 intersecte le plan $O_1O_2O_3$ orthogonalement au centre de gravité G de ce triangle. On a donc $|O_1G| = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}|O_1O_2| = \ell$. Considérons le plan OO_1O_4 qui contient aussi le point G et le point P_{14} de tangence entre le bracelet de centre O_1 et la bague. Dans ce plan, soit P la projection orthogonale de P_{14} sur la droite O_1G. Comme le triangle OO_1G est rectangle en G, on a $|OG| = \sqrt{|OO_1|^2 - |O_1G|^2} = \sqrt{2}\ell$. Les triangles OO_1G et $O_1P_{14}P$ sont semblables car leurs côtés sont orthogonaux deux à deux. Donc $\frac{|O_1P|}{|OG|} = \frac{|O_1P_{14}|}{|OO_1|}$ et $|O_1P| = \sqrt{2}\ell\frac{\ell}{\sqrt{3}\ell} = \sqrt{2/3}\ell$. On en déduit que $|PG| = |O_1G| - |O_1P| = (1-\sqrt{2/3})\ell$. Comme $P_{14}O_4GP$ est un rectangle, le rayon de la bague est donné par $|P_{14}O_4| = |PG| = (1-\sqrt{2/3})\ell$. Le diamètre de la bague est donc de $(1-\sqrt{2/3})9\text{cm} \simeq 1,6515\text{cm}$.

Ont fourni une solution correcte : S. Gvozdić (L1 maths-info à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), C. Vautrin (LDD2 math-phys à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), T. Lejeune (M1 à l'ENS, à Paris), R. Khanfir (doctorant à Sorbonne Université, à Paris), J. Muller (doctorant au LAGA -Institut Galilée, à l'Université Sorbonne Paris Nord, à Villetaneuse), D. Collignon (attaché statisticien hors classe au département informatique et télécommunications pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), G. Dietrich (professeur de maths et d'info en CPGE au Lycée Bellevue, à

Toulouse), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon), C. Lemonnier (professeure au Collège Yves Montand, à Val-au-Perche), C. Romon (secrétaire général de la Mission interministérielle pour la qualité des constructions publiques, à La Défense), l'équipe formée par L. Enderli (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc), I. Israël (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc) et E. Van Der Rest (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc), l'équipe formée par D. Arbulu Sedano (L3 info à Sorbonne Université, à Paris), M. Baccara (1ère année à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, à Paris) et S. Baumert (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris), l'équipe formée par S. Bakayoko (3ème année ingénieur à l'Ecole Royale Militaire, à Bruxelles) et N. E. Polneau (1ère année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), l'équipe formée par J. Wang (M1 MFA à l'Université de Paris, à Paris), J. Wang (M1 MFA à l'Université de Paris, à Paris) et Z. Zhu (M1 MFA à l'Université de Paris, à Paris), l'équipe formée par P. Boisseau (M2 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et M. Vermeil (M2 à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), l'équipe formée par E. Bonnafoux (doctorant au CMLS, à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), A. Gautier (doctorante à l'Université de Berne, à Berne) et A.-B. Ulusoy (doctorant au LIX, à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau).

université PARIS-SACLAY
FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

FMJH

cnrs