

MARATHON D'ORSAY DE MATHÉMATIQUES

Septembre 2022

Le Marathon d'Orsay de Mathématiques est une activité mathématique et ludique qui vous est proposée en dehors de tout cadre d'études. Vous trouverez quelques problèmes de mathématiques ci-dessous. Leur résolution ne relève pas de l'application de recettes enseignées dans des cours avancés, mais nécessite plutôt une réflexion approfondie et une adaptation aux situations nouvelles.

Pour résoudre ces problèmes correctement, il vous est demandé de justifier très soigneusement vos réponses, comme dans une démonstration. Vos solutions peuvent être envoyées par la poste (voir l'adresse sur <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/marathon>), par email à marathon.math@universite-paris-saclay.fr ou déposées à l'Institut de Mathématique d'Orsay dans une boîte en carton prévue à cet effet au rez-de-chaussée du bâtiment 307, dans la salle des casiers à courrier située à droite du grand hall, juste après avoir franchi l'entrée principale.

Si vous répondez à plusieurs problèmes, il vous est demandé de le faire sur des feuilles séparées. Toutes les solutions doivent nous parvenir au plus tard le **lundi 17 octobre 2022 à 14h**. Les solutions reçues tardivement ne seront plus prises en considération. Merci d'indiquer clairement votre nom, prénom, année d'études (ou statut), établissement, ville de cet établissement et adresse email (pour recevoir les problèmes suivants). Ceux qui souhaitent recevoir les énoncés des problèmes suivants sans fournir de solutions pour les problèmes ci-dessous, peuvent le demander à l'adresse email ci-dessus.

Les noms de ceux ayant fourni une solution correcte seront listés avec la solution officielle avant la parution des problèmes suivants. Tous les participants ayant résolu au moins un problème durant l'année 2022-2023 seront invités à la grande remise des prix à Orsay en fin d'année.

Problème 1 (semi et complet)

Carine a passé le temps durant l'été à ranger ses livres de mathématiques, qui sont tous d'épaisseurs différentes, sur son étagère. Carine souhaite disposer ses livres côte à côte en une seule rangée, de sorte que chaque livre (sauf le plus mince de tous) soit adjacent à au moins un livre plus mince. En revanche, Carine ne s'intéresse qu'à l'ordre dans lequel ses livres sont rangés sur l'étagère, et pas à l'orientation de ces différents objets. Si Carine possède n livres (où n est un entier au moins égal à 2), de combien de manières différentes peut-elle les ranger tout en respectant ces règles ?

Problème 2 (semi et complet)

Victor s’amuse à considérer diverses collections d’entiers strictement positifs dont la somme est égale à 2023. De telles collections peuvent contenir des nombres différents d’entiers strictement positifs (en fait, au moins 1 et au plus 2023). Pour chaque collection qu’il considère, Victor calcule le produit de tous les entiers strictement positifs contenus dans cette collection. Par exemple, pour la collection contenant 1000, 1000 et 23, il obtient le produit 23 000 000. Quel est le plus grand produit que Victor pourrait obtenir de cette manière ?

Problème 3 (complet)

Martin dispose d’un échiquier de $2n \times 2n$ cases (où n est un entier au moins égal à 1) et d’une grande réserve de pions. Si il le souhaite, Martin peut placer un pion dans n’importe quelle case précédemment inoccupée. Combien de pions doit-il placer au minimum sur l’échiquier, de sorte que chaque case (vide ou occupée) ait au moins un côté en commun avec une autre case occupée par un pion ?

Problème 4 (complet)

Pierre accompagne ses enfants Mathilde et Mathieu au manège. Celui-ci est équipé de deux pistes équestres en forme de cercles parfaits \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 de rayons différents, et se coupant en deux points distincts. En partant au même moment de l’un de ces points d’intersection, appelons-le A , Mathilde et Mathieu vont faire un tour en poney chacun sur sa piste (Mathilde sur \mathcal{C}_1 et Mathieu sur \mathcal{C}_2), en tournant dans le même sens, et avec des vitesses constantes, mais de sorte qu’ils retournent au point A en même temps. Pierre est très soucieux de manifester le même intérêt pour chacun de ses enfants. Peut-il trouver un point P où se placer de sorte qu’à chaque instant il soit à la même distance de Mathilde que de Mathieu ? Si oui, comment trouver un tel point P ?