# Marathon d'Orsay de Mathématiques

Résultats de la première vague de septembre 2022

Voici les solutions des premiers problèmes, avec les noms des participants qui ont fourni une solution correcte.

**Solution du problème 1 :** Numérotons les livres de 1 à $n$ par ordre d'épaisseur croissante. Remarquons que le livre $n$ doit forcément se trouver à l'une des extrémités de la rangée de livres. En effet, si on place le livre 1 à gauche du livre $n$, alors tous les livres de 2 à $n-1$ doivent aussi être à gauche : si c'est vrai pour les livres 1 à $k$ avec $1 \leq k \leq n-2$, alors le livre $k+1$ doit être adjacent à l'un de ces livres et donc être à gauche également. Le raisonnement est identique si on place le livre 1 à droite du livre $n$. Ainsi, il y a 2 possibilités pour placer le livre $n$ : tout à gauche ou tout à droite. On peut ensuite placer les livres 1 à $n-1$ sans tenir compte du livre $n$, puisque celui-ci sera d'office adjacent à un livre moins épais. Ainsi, si on note $P(n)$ le nombre de possibilités pour ranger $n$ livres, on a $P(n) = 2P(n-1)$. Comme ceci est vrai pour tout $n \geq 3$ et que $P(2) = 2$, on en conclut que Carine a $P(n) = 2^{n-1}$ possibilités pour ranger ses $n$ livres en respectant les règles qu'elle s'est imposées.

**Ont fourni une solution correcte :** A. Tarassov (4ème au Collège Notre Dame les Oiseaux, à Verneuil sur Seine), H. Bernard (3ème au Collège Stanislas, à Paris), L. Choné (2nde au Lycée Louis-le-Grand, à Paris), R. Crovisier (2nde au Lycée Lakanal, à Sceaux), H. Jestin (2nde au Lycée Les Francs Bourgeois, à Paris), M.-L. Royer (2nde au Lycée Franco-Allemand, à Buc), P. Scheid (2nde au Lycée Stanislas, à Paris), N. Seillan (2nde au Lycée Hoche, à Versailles), H. Carroz Gribot (1ère au Lycée Notre-Dame du Grandchamp, à Versailles), C. Cheroux–Aymard (1ère au Lycée Bossuet-Notre-Dame, à Paris), T. Filzi (1ère au Lycée Condorcet, à Paris), P. Laurent-Levinson (1ère au Lycée Ecole Alsacienne, à Paris), D. Marchal (1ère au Lycée Saint Jean Hulst, à Versailles), A. Z. Truong (1ère au Lycée International, à Saint-Germain-en-Laye), I. Amselli (Tle au Lycée Sainte Marie, à Antony), B. Bala (Tle au Lycée Camille Claudel, à Pontault-Combault), A. Bedin (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), H. Bekrar (Tle au Lycée Sévigné, à Cesson-Sévigné), R. Bonnet (Tle au Lycée Agora, à Puteaux), A. Cabanis (Tle au Lycée Notre-Dame des Oiseaux, à Paris), I. Chabane (Tle au Lycée Saint-Exupéry, à Mantes-la-Jolie), J. Chomienne-Rouchon (Tle au Lycée Descartes, à Antony), S. Cohen (Tle au Lycée Charlemagne, à Paris), J. Coulombel (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), S. Defransure (Tle au Lycée Sophie Barat, à Châtenay-Malabry), P. Duvivier (Tle au Lycée René Cassin, à Arpajon), N. Echard (Tle au Lycée Lavoisier, à Paris), C. Hebey (Tle au Lycée Charlemagne, à Paris), J. Hoarau (Tle au Lycée Sonia Delaunay, à Villepreux), J. Le Saoût–Dutay (Tle au Lycée Jules Verne , à Limours), A. Marzouk (Tle au Lycée Lavoisier, à Paris), V. Meslon (Tle au Lycée Madeleine Daniélou, à Rueil-Malmaison), S. Mokaddem (Tle au Lycée Branly, à Dreux), M. Paoli (Tle au Lycée Paul Doumer, à Perreux sur Marne), R. Peugeot-Haroche (Tle au Lycée Lavoisier, à Paris), K. Ricard (Tle au Lycée Français Alexandre Yersin, à Hanoi, Vietnam), Y. Sepulchre (Tle au Lycée François-Joseph Talma, à Brunoy), G. A. Uzunov (Tle au Lycée La Salle-Passy Buzenval, à Rueil-Malmaison), E. Vandenbroucke (Tle au Lycée Fénelon, à Grasse), M. Casadei (1ère bachelor à l'Ecole Polytechnique Fédérale, à Lausanne), M. Komisarova (1ère bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), C. Bourotte (MPI* au Lycée Fénelon Sainte-Marie, à Paris), S. Gvozdić (LDD2 Informatique - Mathématiques à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), M. Yadollahi (LDD2 math-physique à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), A. Beauvisage (LDD3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), A. Bouquillard (L3 maths à l'Université Paris Dauphine, à Paris), S. Corbineau (L3 à l'ENS, à Paris), M. Corlay (1ère année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), N. Déhais (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), G. Faes (1ère année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), A. Fillaire (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), Q. Hurez (1ère année à l'ENS, à Paris), S. Kalisz (L3 à l'ENS, à Paris), F. Lachaud (L3 physique à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), N. Llorens (1ère année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), N. Tardy (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), Z. Yao (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), F. de la Salle (LDD3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), W. Benrissoul (M1 maths appliquées à Sorbonne Université, à Paris), N. Gonde (2ème année BCPST au Lycée Saint-Louis, à Paris), M. Laoufi (M1 à l'ENSAE, à Palaiseau), E. Fagnou (M2 au Télécom Paris, à Palaiseau), C. Metz (doctorant à l'Université Paris-Saclay, à Orsay et au CEA, à Palaiseau), J. Muller (doctorant à l'Institut Galilée, à l'Université Sorbonne Paris Nord, à Villetaneuse), B. Berached (ingénieur informaticien, à Massy), D. Blanchard (professeur de mathématiques au Lycée Notre-Dame Sainte-Croix, à Neuilly-sur-Seine), H. Bouton (césure à l'ENS, à Paris), B. Cognon (BCPST au Lycée Saint-Louis, à Paris), D. Collignon (attaché statisticien hors classe au département informatique et télécommunications pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), L. Danne (professeur de mathématiques et d'informatique au Lycée de Cachan, à Cachan), T. Demoulin (professeur agrégé au Lycée Branly, à Amiens), N. Didrit (professeur de mathématiques et informatique au Lycée La Salle-Passy Buzenval, à Rueil-Malmaison), G. Dubost (enseignant au Lycée Henri-IV, à Paris), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon), C. Lemonnier (professeure de mathématiques au Collège Yves Montand, à Val-au-Perche), J. Moreno (professeur de mathématiques au Lycée Nikola Tesla, à Dourdan), H. N. Nguyen (analyste quantitatif, à Paris), T. Ravary (enseignant au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau), C. Romon (secrétaire général de la Mission interministérielle pour la qualité des constructions publiques, à La Défense), l'équipe formée par N. Desurmont (3ème au Lycée Franco-Allemand, à Buc) et M. Israel (3ème au Lycée Franco-Allemand, à Buc), l'équipe formée par P. Codron (2nde à l'Ecole Jeannine Manuel, à Paris) et T. Ravel (2nde à l'Ecole Jeannine Manuel, à Paris), l'équipe formée par A. El Yaalaoui (2nde au Lycée Franco-Allemand, à Buc), B. Godlewski (2nde au Lycée Franco-Allemand, à Buc) et M. Touffut (2nde au Lycée Franco-Allemand, à Buc), l'équipe formée par T. Bono (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc), M. Jonathan (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc) et N. van der Hoeven (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc), l'équipe formée par C. Henry (1ère au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau) et A. Mehoued (1ère au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau), l'équipe formée par M. Domergue (1ère au Lycée Vaugelas, à Chambéry) et G. A. Faraj (Tle au Lycée Nevers, à Montpellier), l'équipe formée par N. Ismaaili Erny (1ère au Lycée International des Pontonniers, à Strasbourg) et A. Zhang (Tle au Lycée le Gymnase Jean Sturm, à Strasbourg), l'équipe formée par N. Afrakhte (MPSI au Lycée Condorcet, à Paris), R. Sommer (1ère au Lycée Condorcet, à Paris) et L. Toledano (Tle au Lycée Condorcet, à Paris), l'équipe formée par H. Anglade (Tle au Lycée Condorcet, à Paris), M. Devreux-Renaud (Tle au Lycée Condorcet, à Paris) et S. Rupert (Tle au Lycée Condorcet, à Paris), l'équipe formée par L. Bouley (Tle au Cours Secondaire d'Orsay, à Orsay), J. Monteilhet (Tle au Lycée du Sacré Cœur, à La Ville du Bois) et A. Waldek (Tle au Lycée du Sacré Cœur, à La Ville du Bois), l'équipe formée par M. Bouquet (Tle au Lycée Condorcet, à Paris), G. Leroy (Tle au Lycée Condorcet, à Paris) et L. Sauvé (Tle au Lycée Condorcet, à Paris), l'équipe formée par C. Cedillo-Vayson de Pradenne (Tle au Lycée Jean de la Fontaine, à Paris) et A. Lemarié (Tle au Lycée Jean de la Fontaine, à Paris), l'équipe formée par E. Chobeaux (Tle au Lycée Condorcet, à Paris), D. Heusse (Tle au Lycée Condorcet, à Paris) et V. Jacob (Tle au Lycée Condorcet, à Paris), l'équipe formée par M. Couturier (Tle au Lycée Condorcet, à Paris), S. Kort Saidi (Tle au Lycée Condorcet, à Paris) et L. Vuong-Thillerot (Tle au Lycée Condorcet, à Paris), l'équipe formée par L. Enderli-Nishiyama (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), T. Hollender (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc) et A. Urbillac (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), l'équipe formée par S. Gheron (Tle au Lycée Condorcet, à Paris), S. Grimbert (Tle au Lycée Condorcet, à Paris) et M. Luppens–Sfez (Tle au Lycée Condorcet, à Paris), l'équipe formée par L. Johnson (Tle au Lycée Condorcet, à Paris), A. Lattuada (Tle au Lycée Condorcet, à Paris) et P. Macarie (Tle au Lycée Condorcet, à Paris), l'équipe formée par A. de Lamberteri (Tle au Lycée Charles Péguy, à Paris) et J. Xue (Tle au Lycée Charles Péguy, à Paris), l'équipe formée par I. Israël (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Perdriaud (LDD1 info-math à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et T. Saïdi-Pankow (Tle au Lycée Jean-Pierre Vernant, à Sèvres), l'équipe formée par D. Arens (LDD1 économie-mathématiques à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et G. Venet (LDD1 économie-mathématiques à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), l'équipe formée par S. Bakayoko (1ère Master ingénieur civil à l'Ecole Royale Militaire, à Bruxelles) et N. E. Polneau (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), l'équipe formée par Y. Avrane (L2 physique à l'Université Paris Cité, à Paris) et R. Clément (L2 maths à l'Université Paris Cité, à Paris), l'équipe formée par R. Calvet (LDD3 économie-mathématiques à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et P. Clayton (LDD3 économie-mathématiques à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), l'équipe formée par J. Clement-Cottuz (M1 mathématiques appliquées à l'Université Grenoble Alpes, à Grenoble) et L. Vanhaelewyn (L3 à l'ENS, à Paris), l'équipe formée par S. Buchet (M1 MEEF maths à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et C. Lucas (M1 MEEF maths à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), l'équipe formée par M. Baccara (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris, M1 à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, à Paris), S. Baumert (césure, à Paris) et P. Boureau (M1 à l'ENS, à Paris), l'équipe formée par P. Capetillo (M2 optimisation à l'Institut Polytechnique de Paris, à Palaiseau), A. Chaturvedi (M2 à l'Université Paris Dauphine, à Paris) et J. Hornewall (M2 optimisation à l'Institut Polytechnique de Paris, à Palaiseau), l'équipe formée par F. Arous (L2 MFA à l'Université Paris Cité, à Paris), T. De Wolf (2ème bachelor au Sciences Po, à Paris et à l'Université Paris Cité, à Paris) et J. Scardigli (2ème bachelor au Cambridge University, à Cambridge), l'équipe formée par E. Monard (4ème année à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette) et P.-A. Monard (diplômé de l'ENS, à Issy-les-Moulineaux).

**Solution du problème 2 :** Soit $\mathcal{C}$ une collection d'entiers dont la somme est égale à 2023 et dont le produit atteint la plus grande valeur possible. Alors $\mathcal{C}$ ne peut contenir aucun entier $k \geq 5$. En effet, si $k = 2\ell$ avec $\ell \geq 3$, on peut remplacer $k$ par $\ell$ et $\ell$ sans modifier la somme, mais dans le produit le facteur $k$ est remplacé par $\ell^2 > 2\ell = k$ puisque $\ell > 2$. D'autre part, si $k = 2\ell + 1$ avec $\ell \geq 2$, on peut remplacer $k$ par $\ell$ et $\ell + 1$ sans modifier la somme, mais dans le produit le facteur $k$ est remplacé par $\ell(\ell + 1) > 2\ell + 1 = k$ puisque $\ell^2 - \ell - 1 > 0$ si $\ell \geq 2$, les racines de $\ell^2 - \ell - 1$ étant $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} < 2$. Si $\mathcal{C}$ contient l'entier 4, on peut le remplacer par 2 et 2 indifféremment car $2 + 2 = 4$ et $2 \times 2 = 4$. Enfin, $\mathcal{C}$ ne peut pas contenir l'entier 1 car il vaut mieux remplacer 1 et un autre entier $k \geq 1$ de la collection par $k + 1$, ce qui augmente clairement le produit. On voit donc que l'on peut obtenir une collection $\mathcal{C}$ ne contenant que des entiers 2 et 3. Le nombre d'entiers 2 est strictement inférieur à 3, car sinon on remplace 2, 2 et 2 par 3 et 3, ce qui augmente le produit puisque $2 \times 2 \times 2 = 8 < 9 = 3 \times 3$. Comme 2023 et $2021 = 2023 - 2$ ne sont pas divisibles par 3, mais que $2023 = 2 \times 2 + 673 \times 3$, la valeur maximale que l'on peut obtenir pour le produit est $2^2 \times 3^{673}$.

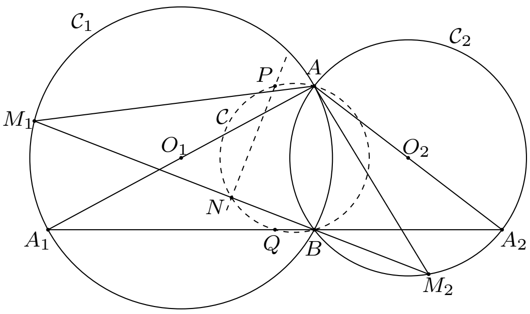
**Ont fourni une solution correcte :** A. Tarassov (4ème au Collège Notre Dame les Oiseaux, à Verneuil sur Seine), L. Choné (2nde au Lycée Louis-le-Grand, à Paris), R. Crovisier (2nde au Lycée Lakanal, à Sceaux), P. Scheid (2nde au Lycée Stanislas, à Paris), N. Seillan (2nde au Lycée Hoche, à Versailles), G. Hoffmann (1ère au Lycée Saint Erembert, à Saint-Germain-en-Laye), P. Laurent-Levinson (1ère au Lycée Ecole Alsacienne, à Paris), B. Bala (Tle au Lycée Camille Claudel, à Pontault-Combault), R. Bonnet (Tle au Lycée Agora, à Puteaux), J. Chomienne-Rouchon (Tle au Lycée Descartes, à Antony), L. Durnerin (Tle au Lycée Agora, à Puteaux), C. Hebey (Tle au Lycée Charlemagne, à Paris), J. Hoarau (Tle au Lycée Sonia Delaunay, à Villepreux), S. Mokaddem (Tle au Lycée Branly, à Dreux), K. Ricard (Tle au Lycée Français Alexandre Yersin, à Hanoi, Vietnam), C. Bourotte (MPI* au Lycée Fénelon Sainte-Marie, à Paris), S. Gvozdić (LDD2 Informatique - Mathématiques à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), M. Yadollahi (LDD2 math-physique à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), A. Bouquillard (L3 maths à l'Université Paris Dauphine, à Paris), S. Corbineau (L3 à l'ENS, à Paris), M. Corlay (1ère année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), N. Déhais (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), Q. Hurez (1ère année à l'ENS, à Paris), S. Kalisz (L3 à l'ENS, à Paris), N. Llorens (1ère année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau), N. Tardy (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), Z. Yao (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), F. de la Salle (LDD3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), W. Benrissoul (M1 maths appliquées à Sorbonne Université, à Paris), N. Gonde (2ème année BCPST au Lycée Saint-Louis, à Paris), M. Laoufi (M1 à l'ENSAE, à Palaiseau), E. Fagnou (M2 au Télécom Paris, à Palaiseau), C. Metz (doctorant à l'Université Paris-Saclay, à Orsay et au CEA, à Palaiseau), J. Muller (doctorant à l'Institut Galilée, à l'Université Sorbonne Paris Nord, à Villetaneuse), H. Bouton (césure à l'ENS, à Paris), B. Cognon (BCPST au Lycée Saint-Louis, à Paris), D. Collignon (attaché statisticien hors classe au département informatique et télécommunications pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), N. Didrit (professeur de mathématiques et informatique au Lycée La Salle-Passy Buzenval, à Rueil-Malmaison), G. Dubost (enseignant au Lycée Henri-IV, à Paris), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon), L. Lemaire (enseignant au Lycée Henri-IV, à Paris), C. Marti (ingénieur, à Lyon), J. Moreno (professeur de mathématiques au Lycée Nikola Tesla, à Dourdan), H. N. Nguyen (analyste quantitatif, à Paris), T. Ravary (enseignant au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau), C. Romon (secrétaire général de la Mission interministérielle pour la qualité des constructions publiques, à La Défense), l'équipe formée par P. Codron (2nde à l'Ecole Jeannine Manuel, à Paris) et T. Ravel (2nde à l'Ecole Jeannine Manuel, à Paris), l'équipe formée par N. Ismaaili Erny (1ère au Lycée International des Pontonniers, à Strasbourg) et A. Zhang (Tle au Lycée le Gymnase Jean Sturm, à Strasbourg), l'équipe formée par L. Bouley (Tle au Cours Secondaire d'Orsay, à Orsay), J. Monteilhet (Tle au Lycée du Sacré Cœur, à La Ville du Bois) et A. Waldek (Tle au Lycée du Sacré Cœur, à La Ville du Bois), l'équipe formée par M. Bouquet (Tle au Lycée Condorcet, à Paris), G. Leroy (Tle au Lycée Condorcet, à Paris) et L. Sauvé (Tle au Lycée Condorcet, à Paris), l'équipe formée par C. Cedillo-Vayson de Pradenne (Tle au Lycée Jean de la Fontaine, à Paris) et A. Lemarié (Tle au Lycée Jean de la Fontaine, à Paris), l'équipe formée par L. Enderli-Nishiyama (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), T. Hollender (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc) et A. Urbillac (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), l'équipe formée par I. Israël (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Perdriaud (LDD1 info-math à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et T. Saïdi-Pankow (Tle au Lycée Jean-Pierre Vernant, à Sèvres), l'équipe formée par S. Bakayoko (1ère Master ingénieur civil à l'Ecole Royale Militaire, à Bruxelles) et N. E. Polneau (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), l'équipe formée par T. Gu (LDD2 info-math à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et L. Zhang (LDD2 info-math à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), l'équipe formée par R. Calvet (LDD3 économie-mathématiques à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et P. Clayton (LDD3 économie-mathématiques à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), l'équipe formée par J. Clement-Cottuz (M1 mathématiques appliquées à l'Université Grenoble Alpes, à Grenoble) et L. Vanhaelewyn (L3 à l'ENS, à Paris), l'équipe formée par S. Buchet (M1

MEEF maths à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et C. Lucas (M1 MEEF maths à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), l'équipe formée par M. Baccara (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris, M1 à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, à Paris), S. Baumert (césure, à Paris) et P. Boureau (M1 à l'ENS, à Paris), l'équipe formée par P. Capetillo (M2 optimisation à l'Institut Polytechnique de Paris, à Palaiseau), A. Chaturvedi (M2 à l'Université Paris Dauphine, à Paris) et J. Hornewall (M2 optimisation à l'Institut Polytechnique de Paris, à Palaiseau), l'équipe formée par F. Arous (L2 MFA à l'Université Paris Cité, à Paris), T. De Wolf (2ème bachelor au Sciences Po, à Paris et à l'Université Paris Cité, à Paris) et J. Scardigli (2ème bachelor au Cambridge University, à Cambridge), l'équipe formée par E. Monard (4ème année à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette) et P.-A. Monard (diplômé de l'ENS, à Issy-les-Moulineaux).

**Solution du problème 3 :** Montrons qu'il faut placer au moins $n(n+1)$ pions sur l'échiquier pour que chaque case soit adjacente à une case occupée. Colorions en rouge toutes les cases formant le bord de l'échiquier, puis toutes les cases à distance paire de celles-ci (la distance entre deux cases étant le nombre minimal de franchissements de côtés communs entre cases à effectuer pour aller d'une case à l'autre). Il y a $4(2n-1)$ cases formant le bord de l'échiquier, puis 16 de moins à chaque fois que l'on augmente la distance de 2. Cela donne donc $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}(8n-4-16k) = 2n(n+1)$ cases rouges. Par construction, chaque case de l'échiquier est adjacente à exactement deux cases rouges. Il faut donc au moins $n(n+1)$ pions pour que chaque case rouge soit adjacente à une case occupée. Réciproquement, montrons qu'il est possible d'atteindre l'objectif avec $n(n+1)$ pions. Colorions les cases de l'échiquier de la manière traditionnelle, en alternance en noir et en blanc, avec une case noire en bas à gauche. Plaçons des pions sur des cases noires pour que les cases blanches soient adjacentes à des cases occupées. Les cases noires se répartissent en $2n$ diagonales (qui descendent quand on se déplace vers la droite), que l'on numérote de 1 à $2n$, en commençant par le coin inférieur gauche et en terminant par le coin supérieur droit (qui forment une diagonale à eux seuls). Sur chaque diagonale de numéro impair, en commençant par une extrémité, on place des pions une case sur deux le long de cette diagonale. Ainsi, la $(2k+1)$ème diagonale recevra $2k+1$ pions lorsque $1 \le 2k+1 \le n$ et la $(2n-2k+1)$ème diagonale recevra $2k$ pions lorsque $n+1 \le 2n-2k+1 \le 2n-1$ c'est-à-dire $2 \le 2k \le n$. Au total, cela utilise $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ pions. En tournant l'échiquier d'un quart de tour, on échange le rôle des cases noires et blanches, et on pose des pions sur des cases blanches pour que les cases noires soient adjacentes à des cases occupées, de la même manière que ci-dessus. On aura donc utilisé en tout $n(n+1)$ pions pour cela, comme annoncé.

**Ont fourni une solution correcte :** S. Gvozdić (LDD2 Informatique - Mathématiques à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), M. Yadollahi (LDD2 math-physique à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), S. Corbineau (L3 à l'ENS, à Paris), N. Déhais (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), M. Laoufi (M1 à l'ENSAE, à Palaiseau), E. Fagnou (M2 au Télécom Paris, à Palaiseau), C. Metz (doctorant à l'Université Paris-Saclay, à Orsay et au CEA, à Palaiseau), J. Muller (doctorant à l'Institut Galilée, à l'Université Sorbonne Paris Nord, à Villetaneuse), D. Collignon (attaché statisticien hors classe au département informatique et télécommunications pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), H. N. Nguyen (analyste quantitatif, à Paris), T. Ravary (enseignant au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau), C. Romon (secrétaire général de la Mission interministérielle pour la qualité des constructions publiques, à La Défense), l'équipe formée par I. Israël (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc), A. Perdriaud (LDD1 info-math à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et T. Saïdi-Pankow (Tle au Lycée Jean-Pierre Vernant, à Sèvres), l'équipe formée par J. Clement-Cottuz (M1 mathématiques appliquées à l'Université Grenoble Alpes, à Grenoble) et L. Vanhaelewyn (L3 à l'ENS, à Paris), l'équipe formée par S. Buchet (M1 MEEF maths à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et C. Lucas (M1 MEEF maths à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), l'équipe formée par M. Baccara (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris, M1 à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, à Paris), S. Baumert (césure, à Paris) et P. Boureau (M1 à l'ENS, à Paris), l'équipe formée par F. Arous (L2 MFA à l'Université Paris Cité, à Paris), T. De Wolf (2ème bachelor au Sciences Po, à Paris et à l'Université Paris Cité, à Paris) et J. Scardigli (2ème bachelor au Cambridge University, à Cambridge).

**Solution du problème 4 :** Soit $B$ le deuxième point d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, soient $O_1$ et $O_2$ les centres de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, et soient $A_1$ et $A_2$ les antipodes de $A$ sur $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Ainsi, $AB$ et $A_1A_2$ s'intersectent orthogonalement en $B$. Soit $Q$ le milieu du segment $A_1A_2$ et soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle $ABQ$. Montrons que l'antipode $P$ de $B$ sur $\mathcal{C}$ est le point recherché.
Soient $M_1$ sur $\mathcal{C}_1$ et $M_2$ sur $\mathcal{C}_2$ tels que $\widehat{AO_1M1} = \widehat{AO_2M_2}$. Il suffit de montrer que $P$ appartient à la médiatrice du segment $M_1M_2$. Remarquons que les points $M_1$, $M_2$ et $B$ sont alignés : une comparaison entre angles inscrits et angles au centre dans $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ donne $\widehat{ABM_1} = \frac{1}{2}\widehat{AO_1M1} = \frac{1}{2}\widehat{AO_2M_2} = \widehat{ABM_2}$ si les points mobiles n'ont pas encore dépassé le point $B$ (pour $i = 1$ ou 2, si $M_i$ a dépassé $B$, l'angle $\widehat{ABM_i}$ doit être remplacé par son supplémentaire et le point $B$ est passé de l'autre côté de $M_i$ sur la droite $M_1M_2$, ce qui ne change pas la conclusion).
D'autre part, les triangles $AM_1M_2$ et $AA_1A_2$ sont semblables, car les angles inscrits $\widehat{AM_1B} = \widehat{AA_1B}$ dans $\mathcal{C}_1$ et $\widehat{AM_2B} = \widehat{AA_2B}$ dans $\mathcal{C}_2$. Soit $N$ le milieu du segment $M_1M_2$. Par similitude, les angles $\widehat{ANB}$ et $\widehat{AQB}$ sont égaux ou supplémentaires (suivant que $N$ et $Q$ sont du même côté ou non de la droite $AB$), de sorte que $N$ appartient à $\mathcal{C}$. La médiatrice du segment $M_1M_2$, orthogonale à la droite $BN$, recoupe donc $\mathcal{C}$ au point antipodal de $B$, c'est-à-dire $P$, comme souhaité.




**Ont fourni une solution correcte :** M. Komisarova (1ère bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), S. Gvozdić (LDD2 Informatique - Mathématiques à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), M. Yadollahi (LDD2 math-physique à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), A. Beauvisage (LDD3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), S. Corbineau (L3 à l'ENS, à Paris), N. Déhais (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), Q. Hurez (1ère année à l'ENS, à Paris), S. Kalisz (L3 à l'ENS, à Paris), N. Tardy (L3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), F. de la Salle (LDD3 magistère à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), E. Fagnou (M2 au Télécom Paris, à Palaiseau), C. Metz (doctorant à l'Université Paris-Saclay, à Orsay et au CEA, à Palaiseau), J. Muller (doctorant à l'Institut Galilée, à l'Université Sorbonne Paris Nord, à Villetaneuse), D. Blanchard (professeur de mathématiques au Lycée Notre-Dame Sainte-Croix, à Neuilly-sur-Seine), D. Collignon (attaché statisticien hors classe au département informatique et télécommunications pour le secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence), N. Didrit (professeur de mathématiques et informatique au Lycée La Salle-Passy Buzenval, à Rueil-Malmaison), V. Lefèvre (CR INRIA au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon), L. Lemaire (enseignant au Lycée Henri-IV, à Paris), H. N. Nguyen (analyste quantitatif, à Paris), T. Ravary (enseignant au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau), C. Romon (secrétaire général de la Mission interministérielle pour la qualité des constructions publiques, à La Défense), l'équipe formée par N. Ismaaili Erny (1ère au Lycée International des Pontonniers, à Strasbourg) et A. Zhang (Tle au Lycée le Gymnase Jean Sturm, à Strasbourg), l'équipe formée par C. Cedillo-Vayson de Pradenne (Tle au Lycée Jean de la Fontaine, à Paris) et A. Lemarié (Tle au Lycée Jean de la Fontaine, à Paris), l'équipe formée par S. Bakayoko (1ère Master ingénieur civil à l'Ecole Royale Militaire, à Bruxelles) et N. E. Polneau (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), l'équipe formée par J. Clement-Cottuz (M1 mathématiques appliquées à l'Université Grenoble Alpes, à Grenoble) et L. Vanhaelewyn (L3 à l'ENS, à Paris), l'équipe formée par S. Buchet (M1 MEEF maths à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et C. Lucas (M1 MEEF maths à l'Université Paris-Saclay, à Orsay), l'équipe formée par M. Baccara (M1 maths à Sorbonne Université, à Paris, M1 à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, à Paris), S. Baumert (césure, à Paris) et P. Boureau (M1 à l'ENS, à Paris), l'équipe formée par F. Arous (L2 MFA à l'Université Paris Cité, à Paris), T. De Wolf (2ème bachelor au Sciences Po, à Paris et à l'Université Paris Cité, à Paris) et J. Scardigli (2ème bachelor au Cambridge University, à Cambridge).