

## MARATHON D'ORSAY DE MATHÉMATIQUES

Résultats de la première vague de septembre 2023

Voici les solutions des premiers problèmes, avec les noms des participants qui ont fourni une solution correcte.

**Solution du problème 1 :** Parmi 18 nombres entiers consécutifs, on peut toujours trouver deux multiples de 9 consécutifs, qui ont donc une parité différente. Montrons que Lisa peut atteindre son objectif en choisissant un entier multiple de 9 qui est pair. Comme cet entier est un multiple de 9, alors la somme de ses chiffres l'est aussi. Puisque cet entier est compris entre 1 et 2023, parmi les multiples de 9 la somme de ses chiffres ne peut donc être que 9, 18 ou 27. Si c'est 9, le nombre a la propriété souhaitée. Si c'est  $18 = 9 \times 2$ , le nombre (qui est pair) a aussi la propriété souhaitée. Si c'est 27, l'entier ne peut être que  $1998 = 27 \times 74$ . Dans tous les cas, cette manière de choisir un entier dans la liste permet bien d'obtenir la propriété souhaitée.

**Ont fourni une solution correcte :**

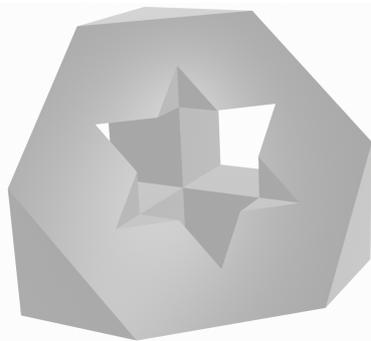
H. Bernard (2<sup>nde</sup> au Lycée Stanislas, à Paris),  
M. Müller (2<sup>nde</sup> au Lycée Polyvalent Ambroise Croizat, à Moutiers),  
M. Nègre (2<sup>nde</sup> au Cours Secondaire d'Orsay, à Orsay),  
C. Roux-Bénabou (2<sup>nde</sup> au Lycée Charlemagne, à Paris),  
A.-L. Shen-Nguyen (2<sup>nde</sup> au Lycée Blaise Pascal, à Orsay),  
J. Szeftel (2<sup>nde</sup> au Lycée Charlemagne, à Paris),  
P. Bouniq-Mercier (1<sup>ère</sup> au Lycée Victor Hugo, à Paris),  
F. Chalopin (1<sup>ère</sup> au Lycée Franco-Allemand, à Buc),  
R. Crovisier (1<sup>ère</sup> au Lycée Lakanal, à Sceaux),  
F. Desodt (1<sup>ère</sup> au Lycée Sophie Barat, à Châtenay-Malabry),  
C. Dinh (1<sup>ère</sup> au Lycée Jean-Baptiste Corot, à Savigny-sur-Orge),  
L. Hini (1<sup>ère</sup> au Lycée Charlemagne, à Paris),  
H. Jestin (1<sup>ère</sup> au Lycée Les Francs Bourgeois, à Paris),  
J. Khsurtabit (1<sup>ère</sup> au Lycée Branly, à Dreux),  
E. Ray (1<sup>ère</sup> au Lycée Saint Erembert, à Saint-Germain-en-Laye),  
M. Rouault (1<sup>ère</sup> au Lycée Diderot, à Paris),  
N. Seillan (1<sup>ère</sup> au Lycée Hoche, à Versailles),  
E. Torres-Gajda (1<sup>ère</sup> au Lycée Saint Jude, à Armentières),  
A. Berthier (Tle au Lycée Notre-Dame des Oiseaux, à Paris),  
T. Bono (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc),  
A. Bourion (Tle au Lycée Hoche, à Versailles),  
R. Chaulet (Tle au Lycée Hoche, à Versailles),  
F. Choquet (Tle au Lycée Hélène Boucher, à Paris),  
R. Cruau (Tle au Lycée Le Bon Sauveur, à Le Vésinet),  
H. Dargent (Tle au Lycée Félix Faure, à Beauvais),  
A. Desforges (Tle au Lycée Jeanne d'Arc, à Colombes),  
E. Desurmont (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc),  
M. Domergue (Tle au Lycée Vaugelas, à Chambéry),  
A. Dusoulier (Tle au Lycée Sophie Barat, à Châtenay-Malabry),  
B. Guinard (Tle au Lycée N'R Hatorah, à Paris),

F. Ha (Tle au Lycée Charlemagne, à Paris),  
C. Henry (Tle au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau),  
G. Hoffmann (Tle au Lycée Saint Erembert, à Saint-Germain-en-Laye),  
S. Ichalalen (Tle au Lycée Julie-Victoire Daubié, à Argenteuil),  
A. Khechine (Tle au Lycée Langevin Wallon, à Champigny sur Marne),  
C. Malbate (Tle au Lycée Notre-Dame Sainte-Croix, à Neuilly-sur-Seine),  
A. Milenkova (Tle au Lycée Antoine de Saint-Exupéry, à Varna, Bulgarie),  
J. Remille (Tle au Lycée Jeanne d'Albret, à Saint-Germain-en-Laye),  
N. Smirnov (Tle au Lycée La Bruyere, à Versailles),  
A. Lemarié (MPSI au Lycée Saint-Louis, à Paris),  
A. Baudouin (L3 MFA à l'Université Paris Cité, à Paris),  
C. Flandrois (1ère année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau),  
M. Gledacheva (3ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),  
N. Gonde (L3 Biosciences à l'ENS de Lyon, à Lyon),  
S. Gvozdić (L3 magistère de mathématiques à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),  
A. Halil (LDD3 MPSI à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),  
V. Meslon (1ère année à l'ESILV, à Courbevoie),  
Y. Wang (1ère année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau),  
N. Alami (2ème année à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette),  
W. Benrissoul (M1 mathématiques appliquées à Sorbonne Université, à Paris),  
B. Bouallouche (M1 algèbre appliquée à l'Université de Versailles Saint-Quentin, à Versailles),  
M. Corlay (2ème année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau),  
A. Delaval (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),  
S. Dufour-Robbe (2ème année à l'INP-Phelma, à Grenoble),  
N. Déhais (M1 FES à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),  
A. Fillaire (M1 maths fondamentales à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),  
Y. Lapous (2ème année à l'Ecole des ponts et chaussées, à Marne-la-Vallée),  
N. Llorens (2ème année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau),  
E. Lubek (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),  
A. Mazeyrat (2ème année à l'INPGI, à Grenoble),  
A. Merceron (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),  
N. Tardy (M1 Hadamard à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette),  
R. Acikgoz (3ème année à l'ENSIIE, à Evry),  
Z. Benbouzid (M2 finance quantitative à l'Université d'Evry Val d'Essonne, à Evry, 3ème année à l'ENSIIE, à Evry),  
F. Bounazou (M2 à l'Université d'Evry Val d'Essonne, à Evry),  
P. Drouvillé (4ème année à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette),  
B. Dussap (doctorant à l'Université Paris-Saclay, à Orsay et à l'INRIA Saclay, à Palaiseau),  
B. Berached (Ingénieur informatique chez Experis, à Massy),  
J. Braconnier (professeur de mathématiques au Lycée Félix Faure, à Beauvais),  
D. Collignon (chef de département à la délégation interrégionale du secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence),  
H. Coquinot (césure à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette, stagiaire au CEA, à Palaiseau),  
N. Didrit (Professeur agrégé de Mathématiques au Lycée La Salle-Passy Buzenval, à Rueil-Malmaison),  
A. Dumortier (Travailleur indépendant, à Los Angeles),  
C. Fischler (enseignante à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),  
Q. Granier (césure à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette),  
R. Guezzi (en césure à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette),  
V. Lefèvre (chargé de recherche Inria au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon),

T. Lejeune (pré-thèse à l'ENS, à Paris),  
C. Lemonnier (professeure agrégée au Lycée Marguerite de Navarre, à Alençon),  
T. Ravary (enseignant au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau),  
P. Richard (enseignant en mathématiques au Lycée Condorcet, à Paris),  
C. Romon (Secrétaire général de la Mission interministérielle pour la qualité des constructions publiques, à La Défense),  
T. Saumtally (ingénieur chez Cerema, à Fontenay-sous-Bois),  
E. Tarassov (Ingénieur de recherche chez Google DeepMind, à Paris),  
l'équipe formée par E. Boucly (2nde au Lycée Franco-Allemand, à Buc) et P. Misguich (2nde au Lycée Franco-Allemand, à Buc),  
l'équipe formée par N. Desurmont (2nde au Lycée Franco-Allemand, à Buc), M. Grémy (2nde au Lycée Franco-Allemand, à Buc) et M. Israël (2nde au Lycée Franco-Allemand, à Buc),  
l'équipe formée par Y. Gaidier (2nde au Lycée Le Bon Sauveur, à Le Vésinet) et P. Gallois (2nde au Lycée Le Bon Sauveur, à Le Vésinet),  
l'équipe formée par P. Codron (1ère à l'Ecole Jeannine Manuel, à Paris) et T. Ravel (1ère à l'Ecole Jeannine Manuel, à Paris),  
l'équipe formée par G. Boyer-Chammard (Tle au Lycée Saint-Jean de Passy, à Paris) et G. Courtet (Tle au Lycée Saint-Jean de Passy, à Paris),  
l'équipe formée par L. Correia (Tle au Lycée Blaise Pascal, à Orsay) et L. Hamrita (Tle au Lycée Blaise Pascal, à Orsay),  
l'équipe formée par K. Deivassagayame (Tle au Lycée Edmond Michelet, à Arpajon) et E. Filippi (Tle au Lycée Edmond Michelet, à Arpajon),  
l'équipe formée par N. Ismaïli Erny (Tle au Lycée International des Pontonniers, à Strasbourg) et T. Schneider (Tle au Lycée Saint-Jean de Passy, à Paris),  
l'équipe formée par L. Bouley (MPSI au Lycée Blaise Pascal, à Orsay), J. Monteilhet (MPSI au Lycée Henri-IV, à Paris) et A. Waldek (PCSI au Lycée François 1er, à Fontainebleau),  
l'équipe formée par D. Bellon (L1 maths-info à l'Université Paris Dauphine, à Paris) et M. Talbot (MPSI au Lycée Aux Lazaristes, à Lyon),  
l'équipe formée par J. Koip (1ère bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), A. Madrisotti (1ère bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau) et J. Radomiński-Lasek (1ère bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),  
l'équipe formée par T. Babelis (1ère bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), M. Komisarova (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau) et A. Sarocinskis (1ère bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),  
l'équipe formée par F. Arous (L3 Mathématiques Fondamentales et Appliquées à l'Université Paris Cité, à Paris), T. De Wolf (en échange à l'Université Mohamed VI Polytechnique, à Rabat, 3ème année de BAsc Maths à Sciences Po, à Paris et à l'Université Paris Cité, à Paris) et M. Prat (en échange, à Tel Aviv, 3ème année de BAsc Maths à Sciences Po, à Paris et à l'Université Paris Cité, à Paris),  
l'équipe formée par A. Elmoussaoui (1ère année à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette) et A. Essakine (2ème année à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette),  
l'équipe formée par C. Boulay (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau) et P. Mor (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),  
l'équipe formée par I. Jouve (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau) et D. Saliou (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),  
l'équipe formée par L. Levy (M1 MFA à l'Université Paris Cité, à Paris) et A. Maréchal (M1 Mathématiques Fondamentales à l'Université Paris Cité, à Paris),  
l'équipe formée par J. Belhouari (2ème année à l'ENSIIE, à Evry) et S. Belhouari (3ème année à l'ENS de Lyon, à Lyon),  
l'équipe formée par J. Clément-Cottuz (M2 Mathématiques appliquées à l'Université Gre-

noble Alpes, à Grenoble) et L. Vanhalewyn (M1 Mathématiques à l'ENS, à Paris),  
 l'équipe formée par E. Dailly (L3 magistère de mathématiques à l'Université Paris-Saclay,  
 à Orsay) et L. Dailly (doctorant à l'Université de Rennes 1, à Rennes),  
 l'équipe formée par B. Cavarretta (M2 Optimisation à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette  
 et à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et Q. Giton (M2 optimisation à l'Université Paris-  
 Saclay, à Orsay),  
 l'équipe formée par M. Baccara (M2 Probabilités et Modèles Aléatoires à Sorbonne Uni-  
 versité, à Paris), S. Baumert (M1 de Mathématiques à Sorbonne Université, à Paris) et C.  
 Gassot (professeur agrégé de mathématiques au Lycée Geoffroy-Saint-Hilaire, à Etampes),  
 l'équipe formée par I. Fronteau (4ème année à l'ENS, à Paris), M. Gauvrit (doctorant à  
 l'Université Paris Cité, à Paris) et A. Terrassin (M2 logique mathématique à l'Université  
 Paris Cité, à Paris).

**Solution du problème 2 :** Considérons d'abord la section du cube entier par le plan horizontal. Celui-ci sépare les 8 sommets du cube en deux groupes de 4, formés chacun du sommet le plus haut (ou le plus bas) et de ses 3 voisins, reliés à ce sommet par une arête. Le plan horizontal coupe donc les 6 arêtes restantes du cube (en leur milieu, par symétrie), de sorte que la section possède 6 sommets : c'est un hexagone, qui doit être régulier par symétrie. Les côtés de cet hexagone sont obtenus dans chaque face du cube comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle dont les côtés de l'angle droit sont des demi-arêtes du cube. Par le théorème de Pythagore, ils ont donc pour longueur  $c = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ . L'aire de cet hexagone est 6 fois l'aire d'un triangle équilatéral de côté  $c$ , soit  $6 \times \frac{c^2}{2} \sin 60^\circ = \frac{27}{4}\sqrt{3}$ .  
 Considérons maintenant le trou dans cet hexagone causé par les 7 cubes de côté 1 manquants dans ce grand cube de côté 3. Le cube manquant au centre génère un trou en forme d'hexagone régulier, de côté  $\frac{c}{3}$ . Chacun des 6 autres cubes manquants a une face (en contact avec le cube central) coupée par le plan horizontal en un segment de longueur  $\frac{c}{3}$  formant un angle de  $45^\circ$  avec chaque arête à ses extrémités. Au-delà de l'une de ces arêtes, la face suivante de ce cube est coplanaire avec l'une des faces du cube central, qui intersecte aussi le plan horizontal en un segment à  $45^\circ$  avec l'arête considérée. La section de ce cube par le plan horizontal est donc un triangle équilatéral de côté  $\frac{c}{3}$ , ayant un côté en commun avec l'hexagone régulier central. Le trou a donc la forme d'une étoile à 6 branches formée de 12 triangles équilatéraux de côté  $\frac{c}{3}$ . Son aire est donc  $2 \times (\frac{1}{3})^2 = \frac{2}{9}$  fois l'aire de l'hexagone régulier de côté  $c$ .  
 L'aire calculée par Agnès est donc égale à  $\frac{7}{9}$  fois l'aire de l'hexagone régulier de côté  $c$ , c'est-à-dire à  $\frac{21}{4}\sqrt{3}$ . Voici une représentation en 3 dimensions d'une moitié du solide construit par Agnès, sur laquelle on voit bien la section en forme d'hexagone régulier privé d'une étoile à 6 branches.



**Ont fourni une solution correcte :**

A.-L. Shen-Nguyen (2nde au Lycée Blaise Pascal, à Orsay),

F. Chalopin (1ère au Lycée Franco-Allemand, à Buc),  
J. Khsurtabit (1ère au Lycée Branly, à Dreux),  
M. Rouault (1ère au Lycée Diderot, à Paris),  
A. Bourion (Tle au Lycée Hoche, à Versailles),  
F. Choquet (Tle au Lycée Hélène Boucher, à Paris),  
R. Cruau (Tle au Lycée Le Bon Sauveur, à Le Vésinet),  
A. Dusoulier (Tle au Lycée Sophie Barat, à Châtenay-Malabry),  
C. Henry (Tle au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau),  
G. Hoffmann (Tle au Lycée Saint Erembert, à Saint-Germain-en-Laye),  
A. Milenkova (Tle au Lycée Antoine de Saint-Exupéry, à Varna, Bulgarie),  
A. Z. Truong (Tle au Lycée International, à Saint-Germain-en-Laye),  
A. Lemarié (MPSI au Lycée Saint-Louis, à Paris),  
C. Flandrois (1ère année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau),  
S. Gvozdić (L3 magistère de mathématiques à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),  
A. Halil (LDD3 MPSI à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),  
Y. Wang (1ère année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau),  
A. Delaval (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),  
Y. Lapous (2ème année à l'Ecole des ponts et chaussées, à Marne-la-Vallée),  
N. Llorens (2ème année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau),  
E. Lubek (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),  
A. Merceron (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),  
F. Bounazou (M2 à l'Université d'Evry Val d'Essonne, à Evry),  
P. Drouvillé (4ème année à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette),  
J. Braconnier (professeur de mathématiques au Lycée Félix Faure, à Beauvais),  
D. Collignon (chef de département à la délégation interrégionale du secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence),  
N. Didrit (Professeur agrégé de Mathématiques au Lycée La Salle-Passy Buzenval, à Rueil-Malmaison),  
C. Fischler (enseignante à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),  
Q. Granier (césure à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette),  
V. Lefèvre (chargé de recherche Inria au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon),  
C. Lemonnier (professeure agrégée au Lycée Marguerite de Navarre, à Alençon),  
T. Ravary (enseignant au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau),  
C. Romon (Secrétaire général de la Mission interministérielle pour la qualité des constructions publiques, à La Défense),  
T. Saumtally (ingénieur chez Cerema, à Fontenay-sous-Bois),  
E. Tarassov (Ingénieur de recherche chez Google DeepMind, à Paris),  
l'équipe formée par P. Codron (1ère à l'Ecole Jeannine Manuel, à Paris) et T. Ravel (1ère à l'Ecole Jeannine Manuel, à Paris),  
l'équipe formée par J. Karpovs (1ère au Lycée Lucie Aubrac, à Courbevoie) et A. Petrovic (1ère au Lycée Lucie Aubrac, à Courbevoie),  
l'équipe formée par L. Correia (Tle au Lycée Blaise Pascal, à Orsay) et L. Hamrita (Tle au Lycée Blaise Pascal, à Orsay),  
l'équipe formée par K. Deivassagayame (Tle au Lycée Edmond Michelet, à Arpajon) et E. Filippi (Tle au Lycée Edmond Michelet, à Arpajon),  
l'équipe formée par N. Ismaïli Erny (Tle au Lycée International des Pontonniers, à Strasbourg) et T. Schneider (Tle au Lycée Saint-Jean de Passy, à Paris),  
l'équipe formée par D. Bellon (L1 maths-info à l'Université Paris Dauphine, à Paris) et M. Talbot (MPSI au Lycée Aux Lazaristes, à Lyon),  
l'équipe formée par T. Babelis (1ère bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), M. Komisarova (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau) et A. Sarocinkis (1ère bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),

l'équipe formée par D. Lazea (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), I. Popescu (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau) et G.-I. Stoica (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),

l'équipe formée par F. Arous (L3 Mathématiques Fondamentales et Appliquées à l'Université Paris Cité, à Paris), T. De Wolf (en échange à l'Université Mohamed VI Polytechnique, à Rabat, 3ème année de BAsC Maths à Sciences Po, à Paris et à l'Université Paris Cité, à Paris) et M. Prat (en échange, à Tel Aviv, 3ème année de BAsC Maths à Sciences Po, à Paris et à l'Université Paris Cité, à Paris),

l'équipe formée par C. Boulay (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau) et P. Mor (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),

l'équipe formée par I. Jouve (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau) et D. Saliou (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),

l'équipe formée par J. Belhouari (2ème année à l'ENSIIE, à Evry) et S. Belhouari (3ème année à l'ENS de Lyon, à Lyon),

l'équipe formée par J. Clément-Cottuz (M2 Mathématiques appliquées à l'Université Grenoble Alpes, à Grenoble) et L. Vanhaelewyn (M1 Mathématiques à l'ENS, à Paris),

l'équipe formée par E. Dailly (L3 magistère de mathématiques à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et L. Dailly (doctorant à l'Université de Rennes 1, à Rennes),

l'équipe formée par B. Cavarretta (M2 Optimisation à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette et à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et Q. Giton (M2 optimisation à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),

l'équipe formée par M. Baccara (M2 Probabilités et Modèles Aléatoires à Sorbonne Université, à Paris), S. Baumert (M1 de Mathématiques à Sorbonne Université, à Paris) et C. Gassot (professeur agrégé de mathématiques au Lycée Geoffroy-Saint-Hilaire, à Etampes),

l'équipe formée par I. Fronteau (4ème année à l'ENS, à Paris), M. Gauvrit (doctorant à l'Université Paris Cité, à Paris) et A. Terrassin (M2 logique mathématique à l'Université Paris Cité, à Paris).

**Solution du problème 3 :** Remarquons que le nombre initial d'entiers impairs sur le sable est 3, tandis que l'opération autorisée ne peut que diminuer ou laisser stationnaire le nombre d'entiers impairs sur le sable. En effet, si  $a$  et  $b$  sont pairs, alors  $a + b$  et  $ab$  aussi, si  $a$  et  $b$  sont de parités opposées, alors  $a + b$  est impair et  $ab$  est pair, et si  $a$  et  $b$  sont impairs, alors  $a + b$  est pair et  $ab$  est impair. Par conséquent, Sabine ne peut jamais effectuer l'opération sur deux nombres impairs, sinon elle ne pourra pas garder trois nombres impairs sur le sable, et donc pas obtenir 2023 trois fois. Parmi les deux autres types d'opérations, le seul nouveau nombre impair obtenu est  $a + b$  lorsque  $a$  et  $b$  sont de parités différentes. C'est donc le type d'opération permettant d'obtenir chaque exemplaire de 2023. Mais alors l'autre entier obtenu par cette opération est  $ab > 2023$  si  $a, b > 1$ . Si  $a$  ou  $b = 1$ , l'autre est égal à 2022 ainsi que leur produit  $ab$ , mais alors tous les entiers dans le sable sont  $> 1$  et cet entier 2022 ne peut plus servir à fabriquer un autre entier 2023. Dans tous les cas, la création de chaque entier 2023 provoque la création d'un entier pair qui est inutilisable pour créer les entiers 2023 suivants. Après la création de deux entiers 2023, il ne reste donc plus qu'un seul entier impair utilisable (et deux entiers pairs trop grands), ce qui ne suffit pas pour obtenir un troisième entier 2023. Ahsoka a donc placé Sabine dans une situation où celle-ci est dans l'incapacité de prendre une bonne décision pour atteindre l'objectif souhaité.

**Ont fourni une solution correcte :**

P. Bouniq-Mercier (1ère au Lycée Victor Hugo, à Paris),

J. Khsurtabit (1ère au Lycée Branly, à Dreux),

E. Ray (1ère au Lycée Saint Erembert, à Saint-Germain-en-Laye),

E. Torres-Gajda (1ère au Lycée Saint Jude, à Armentières),

A. Bourion (Tle au Lycée Hoche, à Versailles),  
 R. Cruau (Tle au Lycée Le Bon Sauveur, à Le Vésinet),  
 H. Dargent (Tle au Lycée Félix Faure, à Beauvais),  
 E. Desurmont (Tle au Lycée Franco-Allemand, à Buc),  
 M. Domergue (Tle au Lycée Vaugelas, à Chambéry),  
 A. Dusoulier (Tle au Lycée Sophie Barat, à Châtenay-Malabry),  
 G. Hoffmann (Tle au Lycée Saint Erembert, à Saint-Germain-en-Laye),  
 A. Milenkova (Tle au Lycée Antoine de Saint-Exupéry, à Varna, Bulgarie),  
 A. Lemarié (MPSI au Lycée Saint-Louis, à Paris),  
 M. Gledacheva (3ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),  
 S. Gvozdić (L3 magistère de mathématiques à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),  
 Y. Wang (1ère année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau),  
 M. Yadollahi (L3 magistère de maths à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),  
 M. Corlay (2ème année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau),  
 A. Delaval (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),  
 S. Dufour-Robbe (2ème année à l'INP-Phelma, à Grenoble),  
 Y. Lapous (2ème année à l'Ecole des ponts et chaussées, à Marne-la-Vallée),  
 E. Lubek (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),  
 A. Merceron (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),  
 N. Tardy (M1 Hadamard à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette),  
 R. Acikgoz (3ème année à l'ENSIIE, à Evry),  
 Z. Benbouzid (M2 finance quantitative à l'Université d'Evry Val d'Essonne, à Evry, 3ème  
 année à l'ENSIIE, à Evry),  
 P. Drouvillé (4ème année à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette),  
 J. Braconnier (professeur de mathématiques au Lycée Félix Faure, à Beauvais),  
 D. Collignon (chef de département à la délégation interrégionale du secrétariat général du  
 ministère de la justice, à Aix-en-Provence),  
 N. Didrit (Professeur agrégé de Mathématiques au Lycée La Salle-Passy Buzenval, à Rueil-  
 Malmaison),  
 C. Fischler (enseignante à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),  
 Q. Granier (césure à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette),  
 R. Guezzi (en césure à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette),  
 V. Lefèvre (chargé de recherche Inria au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon),  
 T. Lejeune (pré-thèse à l'ENS, à Paris),  
 T. Ravary (enseignant au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau),  
 C. Romon (Secrétaire général de la Mission interministérielle pour la qualité des construc-  
 tions publiques, à La Défense),  
 T. Saumtally (ingénieur chez Cerema, à Fontenay-sous-Bois),  
 E. Tarassov (Ingénieur de recherche chez Google DeepMind, à Paris),  
 l'équipe formée par N. Desurmont (2nde au Lycée Franco-Allemand, à Buc), M. Grémy  
 (2nde au Lycée Franco-Allemand, à Buc) et M. Israël (2nde au Lycée Franco-Allemand, à  
 Buc),  
 l'équipe formée par G. Boyer-Chammard (Tle au Lycée Saint-Jean de Passy, à Paris) et  
 G. Courtet (Tle au Lycée Saint-Jean de Passy, à Paris),  
 l'équipe formée par N. Ismaïli Erny (Tle au Lycée International des Pontonniers, à Stras-  
 bourg) et T. Schneider (Tle au Lycée Saint-Jean de Passy, à Paris),  
 l'équipe formée par D. Bellon (L1 maths-info à l'Université Paris Dauphine, à Paris) et  
 M. Talbot (MPSI au Lycée Aux Lazaristes, à Lyon),  
 l'équipe formée par T. Babelis (1ère bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), M.  
 Komisarova (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau) et A. Sarocinskis (1ère  
 bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),  
 l'équipe formée par D. Lazea (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), I. Po-

pescu (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau) et G.-I. Stoica (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),  
 l'équipe formée par A. Elmoussaoui (1ère année à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette) et A. Essakine (2ème année à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette),  
 l'équipe formée par C. Boulay (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau) et P. Mor (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),  
 l'équipe formée par I. Jouve (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau) et D. Saliou (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),  
 l'équipe formée par J. Clément-Cottuz (M2 Mathématiques appliquées à l'Université Grenoble Alpes, à Grenoble) et L. Vanhaelewyn (M1 Mathématiques à l'ENS, à Paris),  
 l'équipe formée par M. Baccara (M2 Probabilités et Modèles Aléatoires à Sorbonne Université, à Paris), S. Baumert (M1 de Mathématiques à Sorbonne Université, à Paris) et C. Gassot (professeur agrégé de mathématiques au Lycée Geoffroy-Saint-Hilaire, à Etampes),  
 l'équipe formée par I. Fronteau (4ème année à l'ENS, à Paris), M. Gauvrit (doctorant à l'Université Paris Cité, à Paris) et A. Terrassin (M2 logique mathématique à l'Université Paris Cité, à Paris).

**Solution du problème 4 :** Remarquons que le problème n'est pas modifié si on étire le rectangle le long de ses côtés pour un faire un carré de côté 1, puisque de tels étirements préservent les (in)égalités entre les aires. Considérons la décomposition de ce carré en 4 colonnes de 4 rectangles induite par les choix des 3 points sur la diagonale, et notons  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  la largeur des colonnes de gauche à droite. Montrons que  $B = N$  si et seulement si  $a + c = b + d$ . En effet, l'aire totale étant égale à 1,  $B = N$  est équivalent à  $B = N = \frac{1}{2}$  tandis que  $a + c = b + d$  est équivalent à  $a + c = b + d = \frac{1}{2}$ . Comme  $B = 2(a + c)(b + d)$ , si  $a + c = b + d = \frac{1}{2}$  on a bien  $B = \frac{1}{2}$  et  $N = 1 - B = \frac{1}{2}$ . Réciproquement, si  $B = \frac{1}{2}$ , alors le produit de  $a + c$  et  $b + d$  dont la somme vaut 1 est égal à  $\frac{1}{4}$ . Mais c'est la valeur maximale que peut prendre ce produit, lorsque chacun des facteurs vaut  $\frac{1}{2}$ .

Considérons maintenant la décomposition de la diagonale de longueur  $\sqrt{2}$  en 3 intervalles de longueurs  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  (dans un ordre quelconque) par les points choisis par Alfred et Bruce. Montrons que Robin a une stratégie gagnante, consistant à placer le troisième point dans l'intervalle le plus long (avec un choix possible en cas d'ex aequo), disons  $\gamma$  pour fixer les idées (de sorte qu'en particulier  $\alpha, \beta < \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ), de manière à scinder cet intervalle en intervalles de longueurs  $x_+$  et  $x_-$  avec  $x_{\pm} = \frac{1}{2}(\gamma \pm (\alpha - \beta))$  et avec l'intervalle de longueur  $x_-$  non adjacent ni diamétralement opposé à celui de longueur  $\alpha$ . Dans ce cas, on a bien  $x_- > 0$  (et donc aussi  $x_+ < \gamma$ ) car  $\alpha < \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$  et  $x_- < \gamma$  (et donc aussi  $x_+ > 0$ ) car  $\beta < \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ . Après ce scindement, on obtient l'égalité  $a + c = b + d$  souhaitée car celle-ci s'écrit  $x_+ + \beta = x_- + \alpha$ .

**Ont fourni une solution correcte :**

H. Bernard (2nde au Lycée Stanislas, à Paris),  
 J. Khsurtabit (1ère au Lycée Branly, à Dreux),  
 A. Bourion (Tle au Lycée Hoche, à Versailles),  
 R. Cruau (Tle au Lycée Le Bon Sauveur, à Le Vésinet),  
 A. Dusoulier (Tle au Lycée Sophie Barat, à Châtenay-Malabry),  
 A. Milenkova (Tle au Lycée Antoine de Saint-Exupéry, à Varna, Bulgarie),  
 M. Gledacheva (3ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),  
 N. Gonde (L3 Biosciences à l'ENS de Lyon, à Lyon),  
 S. Gvozdić (L3 magistère de mathématiques à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),  
 A. Halil (LDD3 MPSI à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),  
 Y. Wang (1ère année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau),  
 M. Yadollahi (L3 magistère de maths à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),  
 N. Alami (2ème année à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette),

W. Benrissoul (M1 mathématiques appliquées à Sorbonne Université, à Paris),  
M. Corlay (2ème année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau),  
A. Delaval (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),  
Y. Lapous (2ème année à l'Ecole des ponts et chaussées, à Marne-la-Vallée),  
E. Lubek (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),  
A. Mazeyrat (2ème année à l'INPGI, à Grenoble),  
A. Merceron (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),  
N. Tardy (M1 Hadamard à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette),  
R. Acikgoz (3ème année à l'ENSIIE, à Evry),  
Z. Benbouzid (M2 finance quantitative à l'Université d'Evry Val d'Essonne, à Evry, 3ème année à l'ENSIIE, à Evry),  
P. Drouvillé (4ème année à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette),  
J. Braconnier (professeur de mathématiques au Lycée Félix Faure, à Beauvais),  
D. Collignon (chef de département à la délégation interrégionale du secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence),  
H. Coquinot (césure à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette, stagiaire au CEA, à Palaiseau),  
N. Didrit (Professeur agrégé de Mathématiques au Lycée La Salle-Passy Buzenval, à Rueil-Malmaison),  
C. Fischler (enseignante à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),  
Q. Granier (césure à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette),  
V. Lefèvre (chargé de recherche Inria au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon),  
C. Lemonnier (professeure agrégée au Lycée Marguerite de Navarre, à Alençon),  
T. Ravary (enseignant au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau),  
P. Richard (enseignant en mathématiques au Lycée Condorcet, à Paris),  
C. Romon (Secrétaire général de la Mission interministérielle pour la qualité des constructions publiques, à La Défense),  
T. Saumtally (ingénieur chez Cerema, à Fontenay-sous-Bois),  
E. Tarassov (Ingénieur de recherche chez Google DeepMind, à Paris),  
l'équipe formée par N. Desurmont (2nde au Lycée Franco-Allemand, à Buc), M. Grémy (2nde au Lycée Franco-Allemand, à Buc) et M. Israël (2nde au Lycée Franco-Allemand, à Buc),  
l'équipe formée par G. Boyer-Chammard (Tle au Lycée Saint-Jean de Passy, à Paris) et G. Courtet (Tle au Lycée Saint-Jean de Passy, à Paris),  
l'équipe formée par N. Ismaïli Erny (Tle au Lycée International des Pontonniers, à Strasbourg) et T. Schneider (Tle au Lycée Saint-Jean de Passy, à Paris),  
l'équipe formée par T. Babelis (1ère bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), M. Komisarova (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau) et A. Sarocinkis (1ère bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),  
l'équipe formée par J. Koip (1ère bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), A. Madrisotti (1ère bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau) et J. Radomiński-Lasek (1ère bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),  
l'équipe formée par D. Lazea (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), I. Popescu (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau) et G.-I. Stoica (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),  
l'équipe formée par A. Elmoussaoui (1ère année à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette) et A. Essakine (2ème année à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette),  
l'équipe formée par C. Boulay (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau) et P. Mor (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),  
l'équipe formée par I. Jouve (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau) et D. Saliou (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),  
l'équipe formée par J. Belhouari (2ème année à l'ENSIIE, à Evry) et S. Belhouari (3ème année à l'ENS de Lyon, à Lyon),

l'équipe formée par J. Clément-Cottuz (M2 Mathématiques appliquées à l'Université Grenoble Alpes, à Grenoble) et L. Vanhaelewyn (M1 Mathématiques à l'ENS, à Paris),  
l'équipe formée par E. Dailly (L3 magistère de mathématiques à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et L. Dailly (doctorant à l'Université de Rennes 1, à Rennes),  
l'équipe formée par B. Cavarretta (M2 Optimisation à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette et à l'Université Paris-Saclay, à Orsay) et Q. Giton (M2 optimisation à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),  
l'équipe formée par M. Baccara (M2 Probabilités et Modèles Aléatoires à Sorbonne Université, à Paris), S. Baumert (M1 de Mathématiques à Sorbonne Université, à Paris) et C. Gassot (professeur agrégé de mathématiques au Lycée Geoffroy-Saint-Hilaire, à Etampes),  
l'équipe formée par I. Fronteau (4ème année à l'ENS, à Paris), M. Gauvrit (doctorant à l'Université Paris Cité, à Paris) et A. Terrassin (M2 logique mathématique à l'Université Paris Cité, à Paris).