III. Fonction génératrice des moments.

$$\varphi_X : \mathbb{R} \to]0,+\infty] \quad \text{est la fonction génératrice des moments de la VAR } X$$
$$t \mapsto \mathbb{E}[\underbrace{e^{tX}}_{\geq 0}]$$

$= 1 + \mathbb{E}(X)\, t + \mathbb{E}(X^2) \frac{t^2}{2} + o(t^2)$

Prop : S'il existe $t_0 > 0$ tq $\forall t \in]-t_0, t_0[$, $\varphi_X(t) < +\infty$ alors

$\forall t \in]-t_0, t_0[$,
$$\boxed{\varphi_X(t) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{E}(X^k) \frac{t^k}{k!}}$$

et le rayon de cvg de la série du membre de droite est $\geq t_0$. Dans ce cas, φ_X admet des dérivées à tt ordre sur $]-t_0, t_0[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in]-t_0, t_0[$,

$$\varphi_X^{(n)}(t) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{E}[X^{n+k}] \frac{t^k}{k!}$$

dérivée n°ième de φ_X

En particulier,
$$\boxed{\varphi_X^{(n)}(0) = \mathbb{E}[X^n]}$$

n° moment de X

(d'où le nom fonction génératrice des moments)

Exemple : ① $X \sim \mathcal{N}_1(\underset{\smile}{0}, \underline{1})$ loi normale / gaussienne $\underbrace{\text{centrée}}_{\substack{0 \\ \| \\ \mathbb{E}[X]}}$ $\underbrace{\text{réduite}}_{\substack{1 \\ \| \\ \mathrm{Var}(X)}}$.

Calculons sa fonction génératrice des moments.

$t \in \mathbb{R}$. $\underset{\substack{\| \\ \varphi_X(t)}}{\mathbb{E}[\underbrace{e^{tX}}_{\geq 0}]} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Formule de} \\ \text{transfert}}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$

$$= \Big(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}}\,dx}_{y = x - t} \Big) \times e^{\frac{t^2}{2}} = e^{t^2/2}$$

$$\| \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = 1$$ car on reconnaît la densité gaussienne.

On veut maintenant calculer les moments au moyen du thm précédent :

$$\varphi_X(t) = e^{t^2/2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{DSE}}}{=} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{t^2}{2}\right)^k \frac{1}{k!} = \sum_{k \geq 0} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \times \underbrace{\frac{(2k)!}{2^k \times k!}}_{\substack{\| \\ \mathbb{E}[X^{2k}]}}$$

$$e^z = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!}$$

on utilise le thm à cet endroit

on retrouve directement l'expression factorisée des moments (voir TD4)

et $\mathbb{E}[X^{2k+1}] = 0$

Lemme : Si la fonction génératrice des moments φ_X de la VAR X vérifie

$$\varphi_X(t) = 1 + at + b\frac{t^2}{2} + o(t^2),$$ alors

(DL au voisinage de 0)

X est de carré intégrable et $\mathbb{E}(X) = a$ et $\mathbb{E}(X^2) = b$.

Exemple 2 : utiliser le lemme précédent pour calculer $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$ lorsque $X \sim \mathcal{P}_o(\lambda)$. [$\varphi_X(t)$, DL en 0 à l'ordre 2].

$t \in \mathbb{R}$. $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{k \geq 0} e^{tk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k\geq 0} \frac{(e^t\lambda)^k}{k!}}_{e^{(e^t\lambda)}}$

$= e^{\lambda(e^t-1)}$

Mais $e^t - 1 = t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ donc $e^{\lambda(e^t-1)} = e^{\lambda\left(t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)}$ u

$= 1 + \lambda\left(t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) + \frac{(\lambda t)^2}{2} + o(t^2)$ u, $u^2/2$

$= 1 + \underset{\mathbb{E}(X)}{\lambda} t + \underset{\mathbb{E}(X^2)}{(\lambda + \lambda^2)} \frac{t^2}{2} + o(t^2)$

Conclusion : $\mathbb{E}[X] = \lambda$ et $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = (\lambda + \lambda^2) - \lambda^2 = \lambda$.

(à nouveau, comparer cette méthode avec le calcul direct fait en TD)

Exercice : Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $Var(X)$ pour $X \sim Bin(n,p)$ en suivant la même méthode

$\mathbb{E}[X] = np$, $Var(X) = np(1-p)$.

Correction : $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{k=0}^{n} e^{tk} P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \ldots$ (A VOUS DE JOUER!)

$$= (pe^t + 1-p)^n$$

$$\underset{+DL_2(0)}{=} \left(1 - p + p\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)\right)^n$$

$$= \Big(1 + \underbrace{pt + p\frac{t^2}{2} + o(t^2)}_{u}\Big)^n = 1 + nu + \frac{n(n-1)}{2}u^2 + o(u^2)$$

$t \to 0$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Dém (prop.) : on va faire la dém. ds le cas où X est discrète.

On suppose $\varphi_X(t) < +\infty$ pour $t \in]-t_0, t_0[$.

On veut montrer que : $\mathbb{E}[e^{tX}] \overset{?}{=} \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} \mathbb{E}[X^k]$

On note que :

$$* \quad \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{x \in S_X} e^{tx} P(X=x) = \sum_{x \in S_X} \left(\sum_{k \geq 0} \frac{(tx)^k}{k!} \right) P(X=x) \quad (1)$$

(1) Fubini

* $\sum_{k\geq 0} \frac{t^k}{k!} \mathbb{E}[X^k] = \sum_{k\geq 0} \frac{t^k}{k!} \sum_{x\in S_X} x^k \, \mathbb{P}(X=x)$

J'ai donc besoin d'appliquer Fubini : mais pourquoi peut-on intervertir les 2 sommes ?

* On commence par vérifier la cvg absolue de la série (1)

$$\sum_x e^{|tx|} \, \mathbb{P}(X=x) = \sum_x \left(\sum_k \frac{|tx|^k}{k!}\right) \mathbb{P}(X=x)$$

$$\mathbb{E}[e^{|tX|}] \leq \mathbb{E}[e^{tX}] + \mathbb{E}[e^{-tX}] < +\infty \text{ si } t \in]-r_0, r_0[$$

$e^{|u|} \leq e^{u} + e^{-u}$ $\quad \left(e^{|u|} = \begin{cases} e^{u} & \text{si } u \geq 0 \\ e^{-u} & \text{si } u < 0 \end{cases} \right).$

Ainsi $\varphi_X(t) = \sum_{k\geq 0} \mathbb{E}[X^k] \frac{t^k}{k!}$, $\forall t \in]-r_0, r_0[$; en particulier, cette dernière série cvg $\forall t \in]-r_0, r_0[$ et donc son rayon de cvg est $\geq r_0$. Le résultat sur les dérivées successives découle des thm de dérivation terme à terme des séries entières.

Théorème (admis) : Soit X et Y deux VAR. Supposons qu'il existe $t_0 > 0$ tq $\forall\, t \in]-t_0, t_0[$, $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t) < +\infty$.

Alors : $X \overset{(\text{loi})}{=} Y$ (et en particulier, $\underbrace{\varphi_X(t) = \varphi_Y(t)}_{\in]0,+\infty]}$, $\forall t \in \mathbb{R}$)

(En toutes lettres, la fonction génératrice des moments caractérise la loi).

↳ si finie sur un voisinage de 0.

IV. Inégalités.

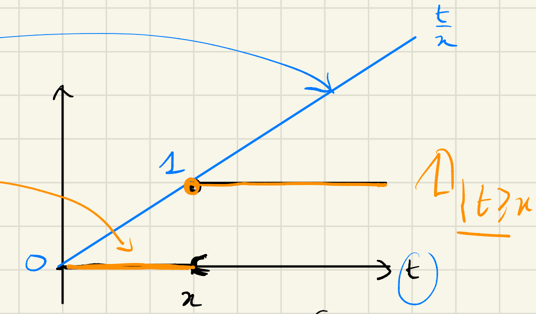
Les moments sont utiles pour établir des inégalités et estimer des probabilités d'événement.

(1) Inégalité de Markov.

Lemme : Soit $t \geq 0$ et $x > 0$. Alors :

$$\mathbb{1}_{\{t \geq x\}} \leq \frac{t}{x}$$

(VRAI si $t < x$; VRAI si $t \geq x$)



Théorème (inégalité de Markov). Soit X VAR tq $X \geq 0$ p.s. $(\mathbb{P}(X \geq 0) = 1)$.

Alors, $\forall x > 0$,

$$\boxed{\underbrace{\mathbb{P}(X \geq x)}_{\text{queue de distribution}} \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{x}.}$$

1° moment.

NB : on ne demande pas X intégrable mais l'inégalité est $\underbrace{\mathbb{P}(X \geq x)}_{\in [0,1]} \leq +\infty$ sinon.

dém : $\mathbb{1}_{\{t \geq x\}} \leq \frac{t}{x}$ $(\forall t \geq 0)$

donc $\mathbb{1}_{\{X \geq x\}} \leq \frac{X}{x}$ p.s. $(X \geq 0$ ps$)$

puis $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X \geq x\}}] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{x}$ par croissance de $\mathbb{E}[\cdot]$.

$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X \geq x\}}] = \mathbb{P}(X \geq x)$ } espérance de Ber$(\mathbb{P}(X \geq x))$.

car $\mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{1}_{\{X\in A\}}}_{Ber(\mathbb{P}(X\in A))}] = 1 \cdot \mathbb{P}(X\in A) + 0 \cdot \mathbb{P}(X\notin A) = \mathbb{P}(X\in A)$.

démonstration du lemme suivant sur la variance :

Soit X VAR de carré intégrable ($\mathbb{E}(X^2)<+\infty$)

$Var(X) = 0$ ssi $\exists x\in\mathbb{R}, X\sim\delta_x$

ie $\mathbb{P}(X=x)=1$.

déjà fait.

?

dém : $Var(X) = \mathbb{E}[\underbrace{(X-\mathbb{E}(X))^2}_{=Y}]$

$x>0$; $Y\geq 0$ ps :

$\mathbb{P}(Y\geq x) \underset{\text{Markov}}{\overset{(*)}{\leq}} \frac{\mathbb{E}(Y)}{x} = 0$, donc $\mathbb{P}(Y>0) = \mathbb{P}(\bigcup_n \{Y\geq \frac{1}{n}\})$

$\boxed{\{Y>0\} = \bigcup_n \{Y\geq \frac{1}{n}\}}$

$= \lim_{n\to+\infty}\uparrow \underbrace{\mathbb{P}(Y\geq 1/n)}_{0}$

$x = 1/n$ ds (*)

$= 0$

donc $1 = \mathbb{P}(Y\geq 0) = \mathbb{P}(Y=0) + \underbrace{\mathbb{P}(Y>0)}_{=0}$

donc $= 1$

càd $(X-\mathbb{E}(X))^2 = 0$ ps, càd $X = \mathbb{E}(X)$ ps donc $X\sim\delta_{\mathbb{E}(X)}$.

(outil intéressant : $Y \geq 0$ ps et $\mathbb{E}[Y] = 0$ alors $Y = 0$ ps).

② Inégalité de Chebychev.

Thm: Soit X de carré intégrable. Alors $\forall\, x > 0$, $\boxed{\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq x) \leq \dfrac{\mathrm{Var}(X)}{x^2}}$

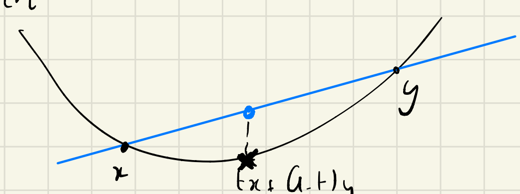
Dém: Posons $Y = |X - \mathbb{E}[X]|$

Notons que $\{Y \geq x\} = \{Y^2 \geq x^2\}$ car $Y \geq 0$.

Ainsi
$$\begin{array}{l} \mathbb{P}(Y \geq x) = \mathbb{P}(Y^2 \geq x^2) \underset{\text{MARKOV}}{\leq} \dfrac{\mathbb{E}[Y^2]}{x^2} = \dfrac{\mathrm{Var}\, X}{x^2} \\ \quad \| \\ \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq x) \end{array}$$

③ Inégalité de Jensen.

φ : I intervalle de $\mathbb{R}$ ouvert $\to \mathbb{R}$ est dite convexe si :
$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x, y \in I, \quad \forall t \in [0,1], \\ \underbrace{\varphi(tx + (1-t)y)}_{\times} \leq \underbrace{t\,\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)}_{\text{corde } \bullet} \quad (*) \end{array} \right.$$



- Interprétation probabiliste : Si X VAR tq $\mathbb{P}(X=x) = t$ et $\mathbb{P}(X=y) = 1-t$, alors $(*)$ signifie :

$$\varphi(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)].$$

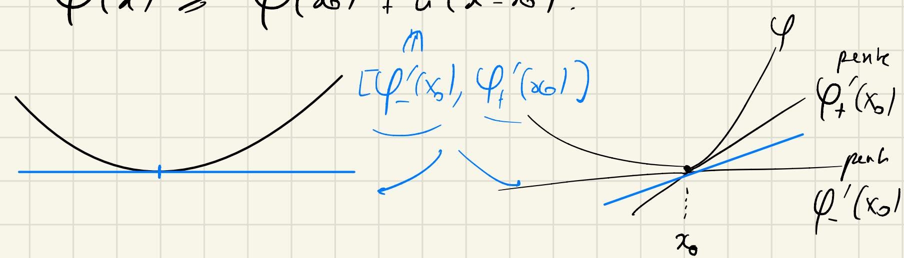
- L'inégalité de Jensen généralise cet énoncé au cas de VAR générales.

<u>Thm</u> : Soit $\varphi : I$ intervalle ouvert de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et X VAR tq $\mathbb{P}(X \in I) = 1$. On suppose X intégrable, alors :

$$\underbrace{\varphi(\mathbb{E}[X])}_{\in \mathbb{R}} \leq \underbrace{\mathbb{E}[\varphi(X)]}_{\in \,]-\infty, +\infty]} .$$

<u>Dém</u> : On admet que φ convexe admet des minorants affines en tout point, ie :

$$\forall x_0 \in I, \quad \exists a \in \mathbb{R} \text{ tq } \quad \varphi(x) \geq \varphi(x_0) + a(x - x_0).$$



avec $x = X$, $x_0 = \mathbb{E}[X]$, on a : $\varphi(X) \geq \varphi(\mathbb{E}[X]) + a(X - \mathbb{E}[X])$.

Par croissance de $\mathbb{E}[\cdot]$, on a alors :
et linéarité

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] \geq \varphi(\mathbb{E}[X]) + a \underbrace{\mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X]]}_{= 0}$$

<u>Exemple</u> : • si X est intégrable, avec $\varphi(x) = e^{tx}$,

$$e^{t\mathbb{E}[X]} \leq \mathbb{E}[e^{tX}], \text{ donc } \qquad \mathbb{E}[X] \leq \frac{\ln \mathbb{E}[e^{tX}]}{t}, \ \forall t > 0.$$

• Soit $x_1, \dots, x_n > 0$.

<u>Mq</u> :

$$\underbrace{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}}_{\text{(MOYENNE GEOM)}} \leq \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i}_{\text{(MOYENNE ARITHMETIQUE)}}$$

$$\iff \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \leq \ln\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

rédaction pas optimale (mais correspond à ce que l'on fait en phase de recherche)

$\Leftrightarrow \quad \mathbb{E}[-\ln X] \geqslant -\ln \mathbb{E}[X]$ si $X \sim \mathrm{Unif}(\{x_1, \dots, x_n\})$.

qui vaut bien puisque $(-\ln)$ est une fonction convexe.

nice.

V. L'espérance de VAR quelconques. (au moyen de sa fct de répartition).

A) À la lebesgue. (IPP$_a$)

Notons que si $x \geqslant 0$, $\quad x = \int_0^x dt = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{x \geqslant t\}} dt$

et donc si $X \geqslant 0$ ps, on a $X = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{X \geqslant t\}} dt$ ps.

puis

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{X \geqslant t\}} dt\right] = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X \geqslant t\}}]\, dt$$

JUSTIFIER

Fubini $\geqslant 0$.

soit

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant t)\, dt.$$

vrai pour VAR à densité ou discrète

$$= \int_0^{+\infty} (1 - F_X(t-))\, dt = \boxed{\int_0^{+\infty} (1 - F_X(t))\, dt.}$$

(B) A la Riemann.

cette limite existe si

continue

VARIATION BORNÉE SUFFIRAIT.

monotone (pas nécessairement continue)

Riemann-Stieltjes intégrale de f % g sur $[ab]$:

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)\left[g(x_{i+1}) - g(x_i)\right] = \int_a^b f\,dg$$

$c_i \in [x_i ; x_{i+1}]$ (!)

$g = id$

$\Leftrightarrow$ intégrale de Riemann usuelle

$\begin{cases} \delta \text{ pas de la subdivision} : [a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b] \\ \delta := \max_{i=0\dots n-1} \{x_{i+1} - x_i\} \end{cases}$

continue sur $[ab]$

Application : $E[\varphi(X)] = \int_a^b \varphi \, dF_X$

$\in [ab]$ ps

FdR de la VAR X

(!) intéressant, mais ne permet pas le calcul de plus d'espérances.

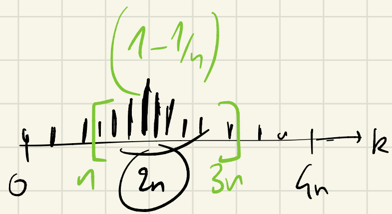
Exercice sur l'inégalité de Chebychev.

Soit X var de carré intégrable : $\mathbb{E}[X^2] < +\infty$.

Alors $$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \lambda) \leq \frac{Var(X)}{\lambda^2}, \quad \forall \lambda > 0.$$

Exo : Mq $$\boxed{\sum_{k=n}^{3n} \binom{4n}{k} \geq \frac{n-1}{n} \cdot 2^{4n}}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

(contexte : $\displaystyle\sum_{k=0}^{4n} \binom{4n}{k} = (1+1)^{4n} = 2^{4n}$)



$X \sim Bin(4n, \frac{1}{2})$

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X=k) = \binom{4n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1-\frac{1}{2}\right)^{4n-k} = \binom{4n}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{4n} \\ \mathbb{E}[X] = 4n \cdot \frac{1}{2} = 2n \\ Var(X) = 4n \cdot \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = n \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \lambda) \leq \frac{Var(X)}{\lambda^2}$$

avec $\lambda = n$, cela donne

$$\mathbb{P}\left(|X - \underbrace{E[X]}_{2n}| \geq n\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(X) = n}{n^2}$$

$$\mathbb{P}\left(|X - E[X]| < n\right) \geq 1 - \frac{\mathrm{Var}(X)}{n^2}$$

$$\mathbb{P}\left(n < X < 3n\right) \geq 1 - \frac{n}{n^2} = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$$

$$\parallel$$

$$\sum_{k=n+1}^{3n-1} \mathbb{P}(X = k)$$

$$\parallel$$

$$\sum_{k=n+1}^{3n-1} \binom{4n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{4n}$$

Conclusion :

$$\sum_{k=n+1}^{3n-1} \binom{4n}{k} \geq \left(\frac{n-1}{n}\right) 2^{4n}.$$

(un poil plus fort que le résultat demandé)

$$X = \begin{cases} +Y & \text{wp} \quad 1/2 \\ -Y & \text{wp} \quad 1/2 \end{cases} \qquad Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda) \qquad X \sim \mathrm{Laplace}(\lambda)$$

Calculer la loi de $\varphi(X)$?

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \mathbb{E}[\varphi(Y)]\,\frac{1}{2} + \mathbb{E}[\varphi(-Y)]\,\frac{1}{2}$$

φ fct mes. bornée

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} \varphi(x)\,\lambda e^{-\lambda x}\,dx + \int_0^{+\infty} \varphi(-x)\,\lambda e^{-\lambda x}\,dx \right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \boxed{\frac{\lambda e^{-\lambda|x|}}{2}}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\,\lambda e^{\lambda x}\,dx.$$

densité de X : $\dfrac{\lambda e^{-\lambda|x|}}{2}$

$$P(X \leq t) = P(\varepsilon Y \leq t) = P(\varepsilon Y \leq t, \varepsilon = +1) + P(\varepsilon Y \leq t, \varepsilon = -1)$$

$$= P(Y \leq t)\,\frac{1}{2} + P(-Y \leq t)\,\frac{1}{2}$$

$P(\varepsilon = +1) = P(\varepsilon = -1) = 1/2$ indépendant de Y