

Corrigé : Mines PSI 2015 Maths 2

Thomas CHEN

Ne pas hésiter à signaler ce que vous pensez être une erreur.

Notations

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul ($n \in \mathbb{N}^*$).

- Dans $\mathcal{E}_n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ espace vectoriel réel de dimension n , on utilisera le produit scalaire canonique défini par

$$\forall U, V \in \mathcal{E}_n, (U|V) = U^T V.$$

- On notera $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients réels.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n$, on notera $\ker(A)$ le noyau de A vu comme endomorphisme de $\mathcal{E}_n$.
- Dans $\mathcal{M}_n$, on notera 0_n la matrice nulle et I_n la matrice unité. Le déterminant est noté $\det$.
- $\mathcal{G}_n = GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n, \det(M) \neq 0\}$ désigne le groupe linéaire des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n$.
- $\mathcal{O}_n = \{M \in \mathcal{M}_n, M^T M = I_n\}$ désigne le groupe orthogonal d'indice n , formé des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n$.
- On sera enfin amené à utiliser des décompositions par blocs. On rappelle en particulier que : si $A, B, C, D, A', B', C', D' \in \mathcal{M}_n$ on a alors dans $\mathcal{M}_{2n}$:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$
$$\det \left(\begin{pmatrix} A & C \\ 0_n & D \end{pmatrix} \right) = \det \left(\begin{pmatrix} A & 0_n \\ C & D \end{pmatrix} \right) = \det(A) \det(D).$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit J_n ou simplement J la matrice de $\mathcal{M}_{2n}$ définie par

$$J = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

On note

$$\mathcal{S}_{p_{2n}} = \{M \in \mathcal{M}_{2n}, M^T J M = J\}.$$

1 Le groupe symplectique

1. Calculer J^2 et J^T en fonction de I_{2n} et J . Montrer que J est inversible et identifier son inverse.

Solution: Un calcul direct montre que $J^2 = -I_{2n}$, donc J est inversible d'inverse $-J$. De plus, $J^T = -J$. On a donc $J^{-1} = J^T = -J$. J est gratuitement orthogonale.

2. Vérifier que $J \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$ et que pour tout réel α ,

$$K(\alpha) = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -\alpha I_n & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$$

Solution: On a donc $J^T J J = J^{-1} J J = J$ donc $J \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$. Soit α , un réel. On a

$$K(\alpha)^T J K(\alpha) = \begin{pmatrix} I_n & -\alpha I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -\alpha I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} = J.$$

Ainsi, $K(\alpha) \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$.

3. Pour tout $U \in \mathcal{G}_n$, vérifier que $L_U = \begin{pmatrix} U & 0_n \\ 0_n & (U^{-1})^T \end{pmatrix}$ est dans $\mathcal{S}_{p_{2n}}$.

Solution: On a, puisque la transposée est une symétrie, et que pour toute matrice inversible A , $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,

$$L_U^T J L_U = \begin{pmatrix} U^T & 0_n \\ 0_n & U^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^T & 0_n \\ 0_n & (U^{-1})^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^T & 0_n \\ 0_n & U^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_n & -(U^T)^{-1} \\ U & 0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} = J.$$

Ainsi, $L_U \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$.

4. Si $M \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$, préciser les valeurs possibles de $\det(M)$.

Solution: Puisque $M^T J M = J$, on a $\det(M)^2 \det(J) = \det(J)$. J étant inversible, $\det(J)$ est non nul, donc $\det(M) = \pm 1$.

5. Montrer que le produit de deux éléments de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ est un élément de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$.

Solution: Soit $M, N \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$. Alors $M^T J M = J$ et $N^T J N = J$. Ainsi, $(MN)^T J (MN) = N^T (M^T J M) N = N^T J N = J$ donc $MN \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$.

6. Montrer qu'un élément de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ est inversible et que son inverse appartient à $\mathcal{S}_{p_{2n}}$.

Solution: D'après la question 4, une matrice de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ est inversible car son déterminant vaut ± 1 . Soit donc $M \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$. Alors $M^T J M = J$. En multipliant par $(M^T)^{-1}$ à gauche et M^{-1} à droite, on obtient

$$J = (M^T)^{-1} J M^{-1} = (M^{-1})^T J M^{-1},$$

donc $M^{-1} \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$.

7. Montrer que si $M \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$ alors $M^T \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$.

Solution: Soit $M \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$. Par la question 6, $M^{-1} \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$ donc $(M^{-1})^T J M^{-1} = J$. En transposant,

$$(M^{-1})^T J^T M^{-1} = J^T$$

puis en inversant, puisque $J^T = -J^{-1}$,

$$M J M^T = J.$$

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_{2n}$ écrite sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ avec } A, B, C, D \in \mathcal{M}_n.$$

8. Déterminer les relations sur A, B, C, D caractérisant l'appartenance de M à $\mathcal{S}_{p_{2n}}$.

Solution: Par produit par bloc, on a

$$M^T J M = \begin{pmatrix} -A^T C + C^T A & -A^T D + C^T B \\ -B^T C + D^T A & -B^T D + D^T B \end{pmatrix}$$

donc $M \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$ si, et seulement si

$$-A^T C + C^T A = -B^T D + D^T B = 0_n \text{ et } A^T D - C^T B = -B^T C + D^T A = I_n.$$

2 Centre de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$

On s'intéresse ici au centre $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ c'est à dire

$$\mathcal{Z} = \{M \in \mathcal{S}_{p_{2n}}, \forall N \in \mathcal{S}_{p_{2n}}, MN = NM\}$$

9. Justifier l'inclusion suivante : $\{-I_{2n}, I_{2n}\} \subset \mathcal{Z}$.

Solution: Il est clair que $-I_{2n}, I_{2n} \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$, et puisque ce sont des homothéties, elles commutent avec toute matrice.

Réciproquement, soit $M \in \mathcal{Z}$ écrite sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \text{ avec } A, B, C, D \in \mathcal{M}_n$$

10. En utilisant $L = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$ et sa transposée, obtenir $B = C = 0_n$ et $D = A$, A étant inversible.

Solution: On remarque que $L = K(-1)^T$, élément de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ par les questions 2 et 7. Puisque $M \in \mathcal{Z}$, M commute avec L , ce qui donne

$$\begin{pmatrix} A & A+B \\ C & C+D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+C & B+D \\ C & D \end{pmatrix}$$

ce qui donne $C = 0_n$, puis $A = D$. M commute aussi avec L^T élément de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ par 7, donc en utilisant les relations obtenues, cela s'écrit

$$\begin{pmatrix} A+B & B \\ A & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ A & A+B \end{pmatrix}$$

ce qui donne $B = 0_n$. En exploitant les relations dans 8, on obtient $AA^T = I_n$, donc A est inversible. On a donc bien $B = C = 0_n$ et $D = A$, avec A inversible.

11. Soit $U \in \mathcal{G}_n$. En utilisant $L_U = \begin{pmatrix} U & 0_n \\ 0_n & (U^{-1})^T \end{pmatrix}$, montrer que A commute avec toute matrice $U \in \mathcal{G}_n$.

Solution: Soit $M \in \mathcal{Z}$. Par la question 3, L_U est dans $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ donc commute avec M , ce qui donne, en utilisant 10, que

$$\begin{pmatrix} U & 0_n \\ 0_n & (U^{-1})^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0_n \\ 0_n & (U^{-1})^T \end{pmatrix}$$

puis, par produit par blocs,

$$\begin{pmatrix} AU & 0_n \\ 0_n & A(U^{-1})^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} UA & 0_n \\ 0_n & (U^{-1})^T A \end{pmatrix}$$

ce qui donne bien $AU = UA$.

12. Conclure que $A \in \{-I_n, I_n\}$ et $\mathcal{Z} = \{-I_{2n}, I_{2n}\}$. *Indication : on montrera d'abord que les matrices $I_n + E_{i,j}$ commutent avec A , où $(E_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n$.*

Solution: Par la question 11, toute matrice inversible commute avec A . En particulier, puisque toutes les matrices $I_n + E_{i,j}$ avec $1 \leq i, j \leq n$ sont des matrices de transvection donc inversible, on a $A + AE_{i,j} = E_{i,j}A + A$ i.e. $E_{i,j}$ commutent avec A pour tout $1 \leq i, j \leq n$. Par ailleurs, $AE_{i,j}$ est une matrice dont toutes les colonnes sont nulles, sauf la j -ième, qui est la i -ième colonne de A . De même, $E_{i,j}A$ est une matrice dont toutes les lignes sont nulles, sauf la i -ième, qui est la j -ième ligne de A .

On obtient donc que pour tout $1 \leq i, j \leq n$, si $i \neq j$, alors $a_{ij} = 0$ et si $i = j$, on a bien $a_{ii} = a_{jj}$. Ainsi, A est diagonal, où ses coefficients diagonaux sont tous égaux. A est donc une homothétie, disons de rapport λ . Ainsi, puisque $M = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_n & 0_n \\ 0_n & \lambda I_n \end{pmatrix} = \lambda I_{2n}$, on a $\det(M) = \lambda^{2n}$.

Par la question 4, $\lambda^{2n} = \pm 1$ donc $\lambda = \pm 1$. Donc $M = \pm I_n$. Donc $\mathcal{Z} \subset \{\pm I_n\}$. Par la question 9, on a l'inclusion réciproque d'où $\mathcal{Z} = \{\pm I_n\}$.

3 Déterminant d'une matrice symplectique

Soit M dans $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ que l'on décompose sous forme de matrice blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

avec $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n$. Dans toute cette partie, les matrices A, B, C, D sont les matrices de cette décomposition.

On suppose dans les questions 13 et 14 que D est inversible.

13. Montrer qu'il existe quatre matrices Q, U, V, W de $\mathcal{M}_n$ telles que

$$\begin{pmatrix} I_n & Q \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0_n \\ V & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Solution: Supposons que Q, U, V, W conviennent. On a

$$\begin{pmatrix} I_n & Q \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0_n \\ V & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U + QV & QV \\ V & W \end{pmatrix},$$

ce qui fournit les égalités $U + QV = A, QW = B, V = C, W = D$. Réciproquement, posons Q, U, V, W tel que $V = C, W = D, Q = BD^{-1}, U = A - BD^{-1}C$. Ces matrices-là vérifient l'égalité voulue par produit par blocs.

14. En utilisant la question 8, vérifier que BD^{-1} est symétrique, puis que

$$\det(M) = \det(A^T D - C^T B) = 1.$$

Solution: On a, par la question 8

$$D^T B = B^T D.$$

En multipliant par $(D^T)^{-1}$ à gauche, et D^{-1} à droite, on a $BD^{-1} = (D^{-1})^T B^T = (BD^{-1})^T$ donc BD^{-1} est bien symétrique. Par l'égalité matricielle établie en question 13, on a

$$\begin{aligned} \det(M) &= \begin{vmatrix} I_n & Q \\ 0_n & I_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U & 0_n \\ V & W \end{vmatrix} = 1 \times \det(U) \det(W) = \det(A - BD^{-1}C) \det(D) \\ &= \det(A^T - C^T (BD^{-1})^T) \det(D) \\ &= \det(A^T - C^T BD^{-1}) \det(D) \\ &= \det(A^T D - C^T B) = \det(I_n) = 1, \end{aligned}$$

car, encore par la question 8, $A^T D - C^T B = I_n$.

Soient $P, Q \in \mathcal{M}_n$ telles que $P^T Q$ soit symétrique et Q non inversible. On suppose qu'il existe deux réels différents s_1, s_2 et deux vecteurs V_1, V_2 non nuls dans $\mathcal{E}_n$ tels que

$$(Q - s_1 P)V_1 = (Q - s_2 P)V_2 = 0$$

15. Montrer que le produit scalaire $(QV_1|QV_2)$ est nul.

Solution: On a $QV_1 = s_1 PV_1, QV_2 = s_2 PV_2$. On a donc

$$(QV_1|QV_2) = (QV_1)^T s_2 PV_2 = s_2 V_1^T Q^T PV_2 = (s_1 PV_1)^T QV_2 = s_1 V_1^T P^T QV_2.$$

Puisque $P^T Q$ est symétrique, on a donc $(s_1 - s_2)(QV_1|QV_2) = 0$, ce qui implique que $(QV_1|QV_2) = 0$ car $s_1 \neq s_2$.

On suppose dorénavant D non inversible.

16. Montrer que $\ker(B) \cap \ker(D) = \{0\}$.

Solution: $X \in \ker(B) \cap \ker(D)$. Alors par produit matriciel, $M \begin{pmatrix} 0_n \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n \\ 0_n \end{pmatrix}$. M étant inversible par 6, on a $\begin{pmatrix} 0_n \\ X \end{pmatrix} = 0_{2n}$ donc $X = 0$. L'inclusion réciproque étant clair, on a bien $\ker(B) \cap \ker(D) = \{0\}$.

Soit m un entier, $m \leq n$. Soit $s_1, \dots, s_m$ des réels non nuls et deux à deux distincts et $V_1, \dots, V_m$ des vecteurs non nuls tels que

$$(D - s_i B)V_i = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, m.$$

17. Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $DV_i \neq 0$ et que la famille $(DV_i, i = 1, \dots, m)$ forme un système libre de $\mathcal{E}_n$.

Solution: Supposons par l'absurde qu'il existe un i tel que $DV_i = 0$. Alors $s_i BV_i = 0$ donc $BV_i = 0$. Donc $V_i \in \ker(B) \cap \ker(D) = \{0\}$ par la question 16. Donc V_i est nul, ce qui est exclu. On souhaite utiliser la question 15. Pour cela, il faut montrer que $B^T D$ est symétrique avec D non inversible. Par la question 8, on a déjà $B^T D = D^T B$ donc $B^T D$ est symétrique. Ainsi, par la question 15, $\forall i \neq j \in \llbracket 1, m \rrbracket, (DV_i | DV_j) = 0$. Donc la famille $(DV_i)_{1 \leq i \leq m}$ est une famille orthogonale de $\mathcal{E}_n$, donc forme un système libre de $\mathcal{E}_n$.

18. En déduire qu'il existe un réel α tel que $D - \alpha B$ soit inversible.

Solution: Supposons que pour tout réel α , $D - \alpha B$ ne soit pas inversible. En particulier, $\forall k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, D - kB$ n'est pas inversible. Il existe donc $n+1$ vecteurs $(V_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ non nuls tel que $(D - kB)V_i = 0$. On applique alors le même raisonnement que la question 17 pour affirmer que les $(DV_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ sont libres dans $\mathcal{E}_n$. On a alors $n+1$ vecteurs libres dans un espace de dimension n : c'est absurde. Il existe donc bien un réel α tel que $D - \alpha B$ soit inversible.

19. Montrer alors que toute matrice de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ est de déterminant égal à 1.

Solution: Par les questions 2 et 5, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $K(\alpha)M = \begin{pmatrix} A & B \\ -\alpha A + C & -\alpha B + D \end{pmatrix}$ est dans $\mathcal{S}_{p_{2n}}$. Puisque $-\alpha B + D$ est inversible, on peut utiliser la question 14 pour affirmer que le déterminant de $K(\alpha)M$ vaut 1. Puisque $\det(K(\alpha)) = 1$, on en déduit que $\det(M) = 1$.

FIN DU SUJET