

1 Tours normales et tours étranges.

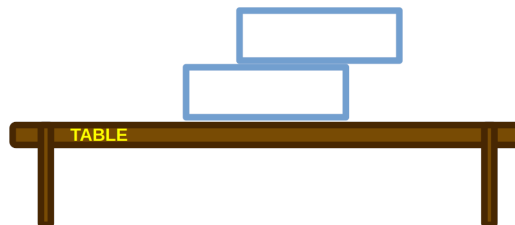
Cette fille se tient en équilibre sur la balustrade. Supposons que, malheureusement, elle perde prise et tombe. D'un point de vue physico-mécanique, qu'est-ce qui détermine si elle tombera vers l'avant ou vers l'arrière ?



1.1 Une première tourelle.

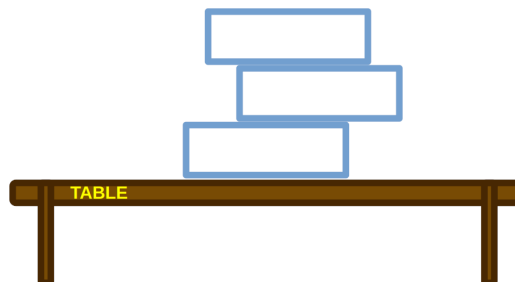
Sans plus tarder, voici votre objet d'étude. Supposons que nous ayons des parallélépipèdes tous identiques (comme ceux du jeu de Jenga). Nous allons placer une brique sur l'autre, créant ainsi des tours primitives, et étudier leur stabilité.

Pour commencer, supposons que nous placions un bloc sur la table et que nous en posions un autre sur le dessus, légèrement décalé par rapport au bloc de base, comme sur le dessin. Pour quels déplacements le bloc du dessus tombe-t-il sur la table ? Pour quel décalage reste-t-il en équilibre sur le bloc de base ?



1.2 Un cas plus complexe. Introduction d'une notation.

Supposons maintenant que nous ayons empilé trois blocs. La question est toujours la même : pour quels décalages la tour est-elle stable ? Pour quels autres décalages une partie ou la totalité de la tour tombe-t-elle sur la table ?



En raisonnant, vous vous rendrez compte que vous devez nommer les différentes quantités, c'est-à-dire introduire une notation pour décrire l'expérience. Par exemple, vous devez décrire les déplacements relatifs des blocs. Il peut également être utile de leur donner des noms : bloc1, bloc2, ...

Définissez donc une notation appropriée. Attention, car ce n'est pas facile et on est souvent obligé de revoir un choix initial qui s'avère inconfortable. Rappelez-vous qu'une bonne notation est exhaustive mais au mieux concise.

1.3 Quatre blocs.

En vous inspirant de la méthode développée précédemment, étudiez la stabilité d'une tour de quatre blocs.

Ce cas est déjà suffisamment complexe pour que vous puissiez vérifier si la notation introduite au point précédent est bonne. Si vous n'êtes pas convaincu, changez-la.

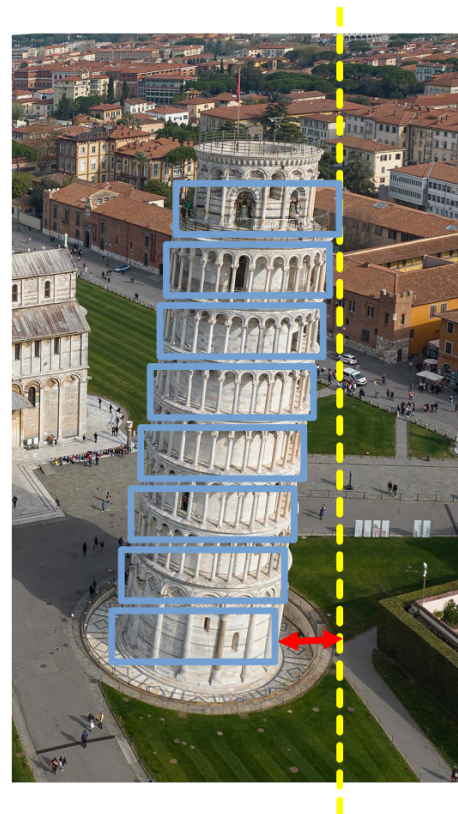
1.4 n blocs.

Vous avez maintenant résolu le problème de la stabilité des premières tours basses. Généralisez votre raisonnement pour trouver le critère de stabilité d'une tour composée d'un nombre arbitraire n de blocs.

Pouvez-vous donner une interprétation intuitive de votre critère ?

1.5 Tour de Pise.

La tour penchée de Pise a été construite à la verticale, mais à la suite d'une erreur de conception fortuite, elle s'est inclinée, tout en conservant sa stabilité.



Vous allez étudier les tours penchées. Vous vous intéressez maintenant à la distance horizontale entre le bloc de base et le bloc du sommet : cette longueur est indiquée en rouge sur le dessin.

Voici la question : en disposant de n blocs, construisez et étudiez la tour dont la distance horizontale entre le bloc de base et le bloc du sommet est la plus grande.

Un conseil : il est difficile de prouver que l'on a effectivement construit une tour penchée d'une distance *maximale*. Si vous obtenez une justification intuitive, c'est déjà une bonne chose.

Vous pouvez raisonner librement, ou suivre le guide proposé ci-dessous.

1. En utilisant autant de blocs que vous le souhaitez, quelle distance maximale pensez-vous pouvoir atteindre ?
2. Trouvez la distance maximale d'une tour composée de 2 blocs. Dessinez-le et tentez éventuellement de le construire.
3. Trouvez la distance maximale d'une tour composée de 3 blocs. Dessinez-le et tentez éventuellement de le construire.
4. Trouvez la distance maximale d'une tour composée de 4 blocs. Dessinez-le et tentez éventuellement de le construire.
5. Trouvez la distance maximale d'une tour composée de n blocs. Faites un dessin.

Effectuez maintenant une étude aussi complète que possible de la séquence (distance max de la tour n blocs) $_n$. N'oubliez pas d'étudier ce qui se passe lorsque n tend vers l'infini. Attention : il s'agit d'une tâche ardue, mais qui vous apportera de grandes satisfactions.

Si vous le souhaitez, essayez de construire votre propre tour, en résumant l'expérience, les observations et les conclusions selon la méthode scientifique apprise en laboratoire. Si vous n'êtes pas sûr de savoir comment réaliser une expérience scientifique, demandez-le !

1.6 Et maintenant ?

Si vous êtes arrivé jusqu'ici, c'est que vous avez déjà fait une merveilleuse découverte et que vous voudrez certainement réutiliser les méthodes que vous avez développées pour étudier d'autres tours. Eh bien, il y a d'autres tours intéressantes !

Jouez avec les blocs fournis et essayez de construire des tours "étranges". Étudiez vos créations d'un point de vue mathématique et documentez vos découvertes.

Si vous le souhaitez, demandez à l'enseignant de vous proposer une tour particulièrement étrange à étudier.

2 Mathématiques babyloniennes

Voici votre objet d'étude. Il s'agit d'une tablette d'argile babylonienne datée entre 1800 et 1600 av.

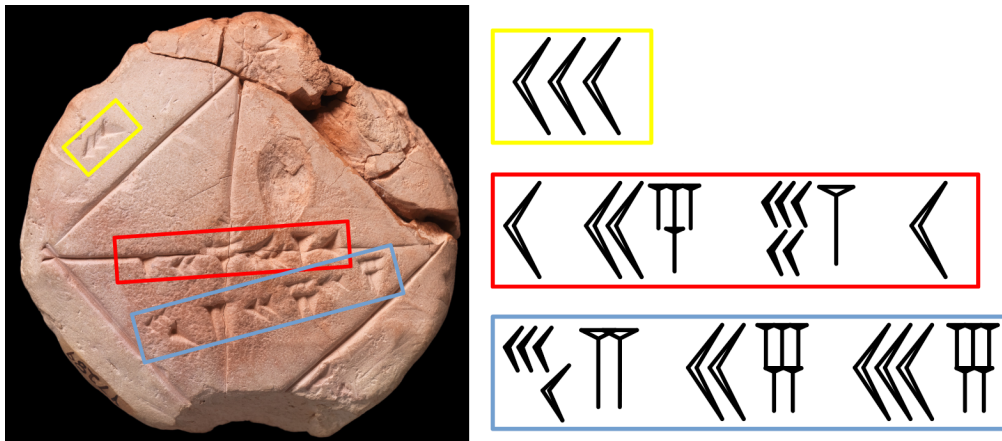


Les mathématiques babyloniennes, comme celles de l'Égypte ancienne, sont souvent oubliées au profit des mathématiques grecques. Peut-être à juste titre : ce sont en effet les Grecs de l'Antiquité qui ont inventé les démonstrations mathématiques. Pourtant, les Babyloniens étaient d'excellents comptables et ingénieurs et possédaient de grandes connaissances géométriques. Il semble qu'ils construisaient leurs temples selon des formes mathématiques parfaites (cubes, polygones réguliers, ...) communiquées en rêve par les dieux aux prêtres (voir : abstraction, monde des idées, ... ?).

Vous trouverez dans cette tablette un résultat géométrique de grande valeur.

Pour les personnes intéressées par le sujet, je recommande l'excellent livre "A history of mathematics" de Carl B. Boyer, malheureusement non traduit en français, mais facile à comprendre.

2.1 Décryptage de la tablette.



La tablette contient trois nombres, manifestement écrits en caractères cunéiformes. Grâce aux informations suivantes, vous pourrez les déchiffrer.

- Les Babyloniens avaient une base sexagénaire et n'utilisaient pas la virgule.
- Chaque symbole-bec < indique 10 et chaque symbole-clou T indique 1.

Remarque : en raison de l'absence de virgule, chacun de ces nombres peut être interprété de différentes manières. Par exemple, $\ll T$ peut signifier 21 ou $21 \cdot 60^{-1} = \frac{21}{60} = 0.35$ ou $21 \cdot 60 = 1260$ ou $21 \cdot 60^{-2} = \frac{21}{3600} = 0.0058\bar{3}$, ...

Dans cette optique, interprétez les chiffres trouvés jusqu'à ce que vous reconnaissiez au moins un nombre célèbre. Lequel ?

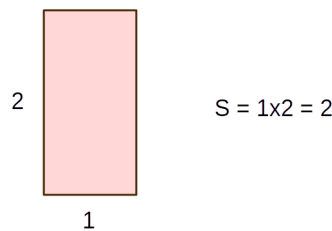
2.2 La methode.

Vous avez découvert que la tablette contient une approximation de la racine carrée de deux.

On ne sait pas exactement quelle méthode les Babyloniens ont utilisée pour calculer ce nombre. Cependant, dans un papyrus égyptien daté après la tablette, on a trouvé la méthode expliquée ci-dessous. Sachant que les Égyptiens connaissaient une grande partie (sinon la totalité) des mathématiques babyloniennes et compte tenu de l'extrême simplicité et du caractère naturel de la méthode, on peut supposer qu'il s'agit de la méthode babylonienne d'origine.

L'observation de base est que la racine de deux est la longueur du côté d'un carré de surface deux.

Considérons donc un rectangle d'aire deux, par exemple celui dessiné ci-dessous.



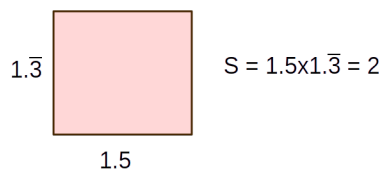
Il ne ressemble en rien à un carré d'aire 2 : un côté est trop grand et l'autre trop petit. La racine carrée de deux est nécessairement plus petite que le grand côté et plus grande que le petit côté : pourquoi ? Trouvez une justification. Construisons alors un rectangle, de surface 2, dont l'un des côtés a la valeur moyenne entre 1 et 2, c'est-à-dire

$$\frac{1+2}{2} = 1.5$$

Pour que le nouveau rectangle ait toujours une surface de 2, l'autre côté doit avoir une longueur de

$$\frac{S}{1.5} = \frac{2}{1.5} = 1.\bar{3}$$

Dessignons-le



Il ressemble déjà davantage à un carré ! Pour les mêmes raisons que précédemment, la racine carrée doit avoir une valeur comprise entre 1.5 et $1.\bar{3}$. Nous construisons ensuite un rectangle dont le côté est égal à la valeur moyenne entre 1.5 et $1.\bar{3}$... Et ainsi de suite, nous obtenons des approximations de plus en plus précises de la racine carrée de deux.

2.3 Questions sur la méthode.

Familiarisez-vous d'abord avec la méthode en effectuant quelques itérations supplémentaires. Ensuite, étudiez-le plus en détail en répondant aux questions suivantes.

1. En partant du rectangle 1×2 , combien d'itérations sont nécessaires pour obtenir l'approximation babylonienne ?

2. Que se passerait-il si, au lieu de partir du rectangle 1×2 , on partait d'un autre rectangle ? Quelles conditions le premier rectangle doit-il remplir pour que la méthode fonctionne ?
3. Vous constatez qu'à chaque itération de la méthode, le nombre de chiffres significatifs de la base et de la hauteur correspondant à la racine de deux augmente. Nous le savons parce que nous connaissons la racine de deux, qui a déjà été calculée pour nous. Supposons que nous ne connaissions pas la vraie valeur de la racine de deux : existe-t-il un moyen de savoir combien de chiffres significatifs de la longueur de la base ou de la hauteur correspondent à la racine de deux ? Si oui, lequel ?
4. Trouvez la formule qui décrit cette méthode itérative. C'est-à-dire, en appelant x_n et y_n respectivement la base et la hauteur du n ème rectangle, trouver la relation entre (x_{n+1}, y_{n+1}) et (x_n, y_n) . N'oubliez pas de définir (x_1, y_1) .
5. Si vous êtes un passionnés de programmation, écrivez un programme qui calcule la racine carrée de deux en utilisant la méthode babylonienne.

2.4 Première généralisation.

1. Généraliser la méthode de recherche de la racine carrée de trois.
2. Généralise la méthode de recherche de la racine carrée de 17.
3. Généralise la méthode pour trouver la racine carrée d'un nombre quelconque.

2.5 Deuxième généralisation.

1. En vous inspirant de la méthode que vous connaissez maintenant sur le bout des doigts, développez une méthode pour trouver la troisième racine de deux. Illustrez-la par des dessins.
2. Généralisez encore : trouvez une méthode itérative qui donne la racine troisième de n'importe quel nombre.

2.6 Généralisation suprême.

1. Généraliser davantage et trouver une méthode pour calculer la racine i ème de n'importe quel nombre.
2. Est-il encore possible de faire des dessins ? Qu'est-ce qu'on imagine ?

Examinez attentivement la formule suprême que vous avez construite. Vous rappelle-t-elle quelque chose ? Quelles autres méthodes itératives connaissez-vous ? Indice : une méthode itérative très célèbre a été développée 3500 ans après notre tablette, par un scientifique anglais, fondateur de la mécanique classique...

3 Pouvoirs thaumaturgiques.

Certains rois français de la troisième dynastie, comme Philippe I, se voyaient attribuer la capacité de guérir les malades par l'imposition des mains.



Le roi Henri II de France soignant les scrofules (miniature du XVI^e siècle).

Supposons que vous ayez Philippe I sur les bras. Vous doutez de ses capacités... Ou, à tout le moins, vous aimeriez les prouver scientifiquement. Vous mettez au point un test de votre cru pour prouver ou infirmer les capacités de Philippe I.

Vous pouvez raisonner complètement seuls, ou vous aider des considérations suivantes, que je vous propose.

- Essayez de créer un test qui soit réalisable dans la pratique.
- Veiller à l'aspect mathématique, mais pas seulement. Souhaitez-vous bander les yeux des participants ? Où feriez-vous votre expérience ? Les participants à l'étude seront-ils français ou allemands ?
- Pour vous, quelle doit être l'efficacité d'un thaumaturge pour en être un ? On peut raisonnablement penser qu'un thaumaturge qui est un thaumaturge ne guérit pas les malades 100% du temps, mais un pourcentage plus faible, peut-être 80% du temps... ou peut-être qu'un pourcentage de guérison de 10% est suffisant pour que vous considériez un thaumaturge possible comme tel ! Il s'agirait tout de même d'un miracle... Vous pourriez commencer par choisir ces pourcentages (motivés !) et créer ensuite un test pour connaître l'efficacité de Philippe Ier, que vous compareriez ensuite à votre choix initial pour juger s'il est thaumaturge ou non.
- Calculez la probabilité que votre test donne un faux positif ou un faux négatif !
- Dans un modèle plus compliqué, il faut considérer qu'un certain nombre de guérisons spontanées se produisent indépendamment de l'imposition des mains. Vous pouvez rechercher sur Internet une maladie spécifique dont le taux de guérisons spontanées est connu et créer un test en utilisant des patients atteints de cette maladie. Vous pouvez également laisser le taux de guérisons spontanées comme variable.
- Si l'on veut tenir compte de l'effet placebo, comment fait-on ? Pour vous faire une idée, faites une recherche sur Internet sur l'intensité de l'effet placebo.
- Une fois que vous avez créé votre test, vérifiez que Philippe I n'a aucun moyen de vous tromper !

4 Étude d'une énigme arithmétique.

Une prison abrite 100 prisonniers, chacun dans une cellule individuelle, numérotée de 1 à 100. À l'occasion du mariage du prince, le roi décide de gracier certains prisonniers. Ne voulant pas décider personnellement qui seront les heureux élus, il décide de suivre une méthode algorithmique si alambiquée qu'il est lui-même incapable de savoir qui sera libéré et qui ne le sera pas. Ainsi, pendant la nuit, alors que tous les prisonniers sont endormis, il entre avec un passe-partout et donne des tours aux cellules, comme suit. D'abord, il donne un tour de clé à toutes les cellules, les ouvrant toutes. Puis il recommence en donnant un autre tour aux cellules multiples de 2, c'est-à-dire les nombres 2, 4, 6, 8, 10, ..., 100, qui sont alors fermées. On fait ensuite de même avec les cellules multiples de 3, c'est-à-dire les nombres 3, 6, 9, 12, ..., 99. Il continue ensuite avec les multiples de 4, c'est-à-dire 4, 8, 12, 16, ..., 100 et ainsi de suite avec les multiples de tous les nombres 5, 6, 7, ... jusqu'à 100.

- Combien et quels prisonniers seront libérés, et pourquoi ? Commencez par rédiger à la main une liste des dix premiers prisonniers.
- Et si au lieu de 100 prisonniers, nous avions 1000 prisonniers ?
- Et s'il y avait n prisonniers, où $n \in \mathbb{N}$ est un nombre entier positif quelconque ?
- Étudier la fonction qui associe à n le nombre de prisonniers ainsi libérés dans une prison de n cellules.

Maintenant que nous avons étudié en détail le cas de base, nous sommes libres d'étudier les généralisations. Voici un premier axe de recherche :

- Et si, au lieu de donner des tours de clé à des multiples de tous les nombres, le roi ne donnait des tours de clé qu'à des multiples de nombres premiers, qu'est-ce que cela changerait ? Ou seulement aux multiples des nombres impairs, ou seulement aux multiples des nombres pairs ? Si l'une de ces généralisations vous semble intéressante, lancez-vous dans son étude.

Voici un deuxième axe de recherche :

- Supposons que le roi donne, comme dans l'énigme originale, un tour de clé à chaque multiple de chaque nombre. Mais imaginons que le verrou ait besoin d'exactly 2 tours de clé pour être ouvert, soit
 - 0,3,6,9,... tours : fermé
 - 1,4,7,10,... tours : fermé
 - 2,5,8,11,... tours : ouvert

Soit $l \in \{1, 2, \dots, n\}$ le numéro de la cellule d'un prisonnier. Quel critère ce numéro doit-il satisfaire pour que le prisonnier soit libéré ou reste incarcéré ? Quels et combien de prisonniers seraient libérés dans une prison de n cellules ?

- Supposons que les verrous de prison nécessitent k tours pour être ouverts, et que l est le numéro de la cellule d'un prisonnier. Quel critère doit satisfaire l pour que le prisonnier soit libéré ou reste prisonnier ?
- Écrire un programme qui calcule la fonction

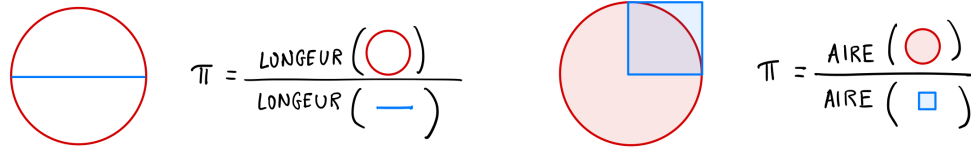
$n \in \mathbb{N} \mapsto f_k(n) =$ nombre de détenus libérés dans une prison de n cellules avec les verrous à k tours de clé

et représenter graphiquement f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 sur un domaine suffisamment grand de votre choix. Commentez les caractéristiques de ces fonctions.

5 Approximations de π .

(En collaboration avec Matteo D'Errico.)

Le nombre π a déjà été défini par les Grecs comme le quotient de la longueur de la circonférence d'un cercle par son diamètre. On peut également dire que π est le quotient de l'aire d'un cercle par l'aire du carré construit sur le rayon.



- Convainquez-vous ou prouvez que ces deux définitions sont équivalentes. Pour prouver une équivalence, il faut procéder comme suit. Dans un premier temps, prouvez que si l'on définit π comme le quotient de la longueur de la circonférence d'un cercle par son diamètre, alors le quotient de l'aire d'un cercle par l'aire du carré construit sur le rayon est également égal à cette valeur. Puis, prouver que si l'on définit π comme le quotient de l'aire d'un cercle par l'aire du carré construit sur le rayon, alors le quotient de la longueur de la circonférence d'un cercle par son diamètre est également égal à cette valeur.

Ce sont les Grecs qui ont compris que π n'est pas un nombre rationnel, c'est-à-dire qu'il peut être exprimé comme le quotient de deux nombres entiers. En effet, π est un nombre à virgule, dont les chiffres décimaux ne se répètent jamais.

- Considérons un nombre avec une virgule qui est périodique, par exemple 125.32323232... . Un tel nombre peut-il toujours être exprimé comme le quotient de deux nombres entiers ? Si oui, expliquez pourquoi et illustrez la méthode que vous utilisez pour obtenir le quotient en question.
- Considérons maintenant le quotient de deux nombres entiers, par exemple $\frac{22}{7}$ ou $\frac{132}{110}$. Lorsqu'il est exprimé sous forme de nombre avec une virgule, comporte-t-il une période ? Si oui, est-ce le cas pour tous les quotients de deux nombres entiers ? En réfléchissant à cette question, vous utiliserez certainement l'algorithme de division que vous avez appris à l'école primaire. Pouvez-vous nous expliquer comment fonctionne cet algorithme ? Attention, ne sautez pas cette étude de l'algorithme de la division : un bon mathématicien n'utilise jamais un algorithme ou une formule qu'il ne peut pas justifier !
- A partir de ces deux questions préliminaires, tirez des conclusions : décrivez les nombres qui sont quotients de deux nombres entiers. Que pouvez-vous dire des nombres qui ne sont pas quotients de deux nombres entiers ?

Nous abordons maintenant l'étude du nombre π . Le but de cette recherche est d'approcher sa valeur à l'aide de techniques élémentaires. Si vous le souhaitez, vous pouvez maintenant vous arrêter et réfléchir par vous-même à la manière de procéder. Attention : ce n'est pas si simple. Permetts-toi donc d'y réfléchir pendant plusieurs jours. Après tout, il a fallu à l'humanité de nombreux siècles pour obtenir des valeurs précises de π ...

Dans ce qui suit, j'esquisse quelques idées possibles. Vous êtes libre de les mettre en pratique, de justifier leur validité et de les généraliser autant que possible.

5.1 Approximations rationnelles.

Supposons que nous connaissions déjà la valeur de π avec une grande précision (c'est-à-dire que nous connaissons de nombreux chiffres après la virgule) :

$$\pi = 3.1415926535897932384626433...$$

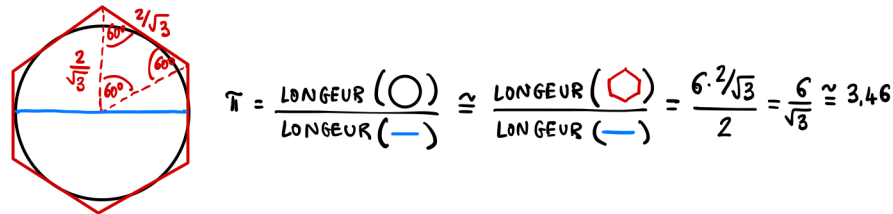
Nous nous intéressons aux approximations rationnelles de π , c'est-à-dire aux fractions dont la valeur est proche de π : vous aurez certainement remarqué que $\frac{22}{7}$ en est une. Ces approximations sont très utiles dans les calculs manuels, car calculer à la main avec des fractions est beaucoup plus facile que de calculer avec une valeur comme celle que vous voyez ci-dessus !

A vous : développez des méthodes pour obtenir des approximations rationnelles de π . Justifiez la validité de vos méthodes. Faites une liste de toutes les fractions que vous obtenez. Étudiez chaque fraction que vous obtenez : quelle est sa précision, sa facilité de calcul ? Quelle est votre fraction préférée et pourquoi ?

5.2 Une méthode grecque.

J'illustre ci-dessous une variante de l'une des méthodes utilisées par les Grecs pour obtenir une approximation de π .

Nous circonscrivons (savez-vous ou vous souvenez-vous de ce que signifie circonscrire et inscrire ?) un polygone régulier à un cercle. Nous remarquons alors que si le polygone a beaucoup de côtés, son périmètre est très proche de la longueur du cercle. L'idée est donc la suivante : on peut obtenir une valeur approximative de π en divisant le périmètre du polygone par le diamètre. Le dessin suivant est un exemple numérique.



- Convainquez-vous de l'exemple ci-dessus. Faites des dessins d'autres cas et étudiez-les. Cette méthode vous convainc-elle ?
- Quel est le rapport entre l'approximation obtenue à partir d'un certain polygone et l'approximation obtenue à partir d'un polygone ayant un plus grand nombre de côtés ? Justifiez votre réponse.
- Trouver le périmètre du cercle régulier n circonscrit au cercle pour les premières valeurs de n : $n = 3, 4, 5, 6, \dots$

Dans votre étude des questions précédentes, vous avez probablement utilisé des considérations géométriques différentes pour chaque cas. Il serait très intéressant d'avoir une formule pour le périmètre du n -gone circonscrit...

- Cherchez une formule qui donne le périmètre de l' n -gone régulier circonscrit au cercle en fonction de n (et du rayon du cercle). Si vous le pouvez, analysez-la : est-elle élémentaire ?

Construisez maintenant une méthode élémentaire (c'est-à-dire une méthode qui utilise le moins de connaissances possible) pour trouver récursivement la valeur du périmètre du 2^k -gone, pour $k = 2, 3, 4, \dots$

- Trouver le périmètre du carré circonscrit au cercle (4-gone, soit 2^2 -gone).
- Trouver le périmètre de l'octogone régulier circonscrit au cercle (8-gone, soit 2^3 -gono).
- Trouvez une relation géométrique entre la longueur du côté du carré et celle de l'octogone. Conclure par une formule qui donne la longueur du côté de l'octogone en fonction de la longueur du côté du carré.
- En vous inspirant de vos considérations de l'étape précédente, trouvez une relation géométrique entre la longueur du côté de l'octogone et celle du 16-gone. En extraire une formule.
- Généralisez. Trouvez une formule pour la longueur du côté de 2^{k+1} -gone régulier circonscrit au cercle en fonction de la longueur du côté de 2^k -gone régulier circonscrit au cercle. 10. En utilisant les formules trouvées, obtenir des approximations successives de π . Commentez, également par rapport aux considérations que vous avez faites au début de votre recherche. Comment jugez-vous la qualité de ces approximations ?

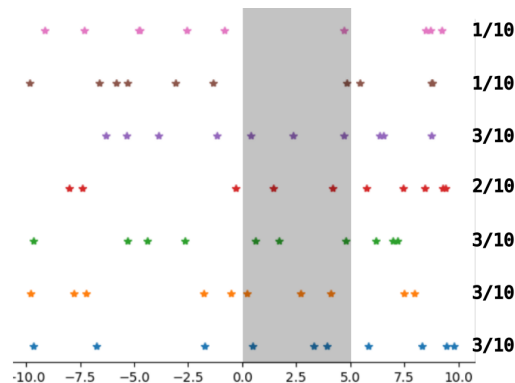
Le travail est loin d'être terminé. Voici quelques questions complémentaires.

- Cette méthode peut-elle être généralisée à partir du triangle circonscrit ?

- Cette méthode peut-elle être généralisée à partir du pentagone circonscrit ?
- Cette méthode peut-elle être généralisée à partir du n -gone circonscrit ?
- Généraliser cette méthode à partir du carré inscrit. En comparant les approximations de n ainsi trouvées avec celles obtenues à la question 10, trouver un critère qui permette de déduire combien de chiffres significatifs de l'approximation de n sont corrects à chaque itération de l'algorithme. De plus, à partir de cette même comparaison, justifier la convergence des deux séquences d'approximations de π .
- Reprendre le raisonnement de la question précédent dans le cas de la suite obtenue à partir du triangle inscrit.
- En se basant sur ce qui a été fait jusqu'à présent, développer une méthode récursive qui permet d'obtenir des approximations de π en exploitant l'aire des polygones réguliers inscrits/circonscrits.
- Qu'en est-il de l'utilisation de polygones non réguliers ? Si vous trouvez que cela a un sens, lesquels ?
- Le volume de la sphère contient π . En approximant son volume avec des polytopes circonscrits (lesquels choisir ?), peut-on obtenir de bonnes approximations de π ? Si vous pensez que oui, développez une méthode qui permet d'obtenir au moins une approximation.

5.3 Une méthode probabiliste pour les informaticiens.

Commençons par un exemple. Supposons que nous puissions générer une infinité de nombres $M_1, M_2, M_3, \dots$ uniformément au hasard dans l'intervalle $[-10, 10]$ et indépendants les uns des autres. Voici quelques réalisations des premiers 10 nombres $M_1, \dots, M_{10}$ (sur le côté, nous avons calculé la proportion de ces nombres qui tombent dans l'intervalle $[0, 5]$, nous en aurons besoin plus tard).



Par définition, cela signifie que pour chaque nombre M_k et pour chaque intervalle $[a, b] \subset [-10, 10]$, la probabilité que M_k tombe dans cet intervalle est proportionnelle à la longueur $b - a$ dudit intervalle $[a, b]$. C'est-à-dire

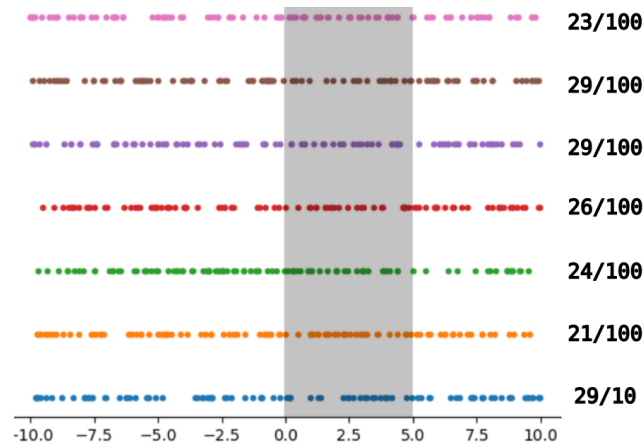
$$p_{a,b}^{-10,10} := \mathbb{P}(M_k \in [a, b]) = \frac{\text{longueur}([a, b])}{\text{longueur}([-10, 10])} = \frac{b - a}{20}$$

- Familiarisez-vous avec cette construction : si nécessaire, demandez des explications supplémentaires à l'enseignant. Qu'est-ce qui changerait si les nombres étaient distribués dans un autre intervalle, par exemple $[0, 10]$ ou dans un intervalle générique $[A, B]$? Enfin, trouvez une formule pour $p_{a,b}^{A,B}$.

Considérons maintenant le sous-intervalle $[0, 5] \subset [-10, 10]$. La probabilité qu'un nombre aléatoire M_k tombe dans ce sous-intervalle est

$$p_{0,5}^{-10,10} = \mathbb{P}(M_k \in [0, 5]) = \frac{\text{longueur}([0, 5])}{\text{longueur}([-10, 10])} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 25\%$$

Considérons maintenant les 100 premiers nombres aléatoires $M_1, M_2, \dots, M_{100}$. Dans l'illustration suivante, nous voyons différentes réalisations de ces 100 premiers nombres, ainsi que la proportion de nombres tombant dans l'intervalle $[0, 5]$. Comme vous pouvez le constater, cette proportion est proche de $25\% = p_{0,5}^{-10,10}$.



Ce principe se généralise. Si nous prenons une grande quantité de nombres au hasard, la proportion de ceux qui tombent dans l'intervalle $[a, b]$ est une approximation de la probabilité qu'un nombre tombe dans cet intervalle. Autrement dit, pour tout grand i , si nous désignons par $N_1, N_2, \dots$ les nombres qui tombent uniformément au hasard dans l'intervalle $[A, B]$:

$$p_{a,b}^{A,B} \approx \frac{\text{quantité de nombres parmi } N_1, \dots, N_i \text{ qui tombe dans } [a, b]}{i}$$

(En principe, plus i est grand, meilleure est l'approximation). Cela nous permet également d'obtenir une approximation de la longueur de l'intervalle $[a, b]$:

$$\text{longueur}([a, b]) = p_{a,b}^{A,B} \text{longueur}([A, B]) = p_{a,b}^{A,B} (B - A) \approx \frac{\text{quantité de nombres parmi } N_1, \dots, N_i \text{ qui tombe dans } [a, b]}{i} (B - A)$$

- Familiarisez-vous avec ce raisonnement. Écrivez un algorithme dans votre langage de programmation préféré qui génère des nombres aléatoires et les utilise pour approximer la longueur d'un intervalle à votre convenance.

Vous êtes maintenant prêt à généraliser ce principe et à développer votre propre algorithme pour l'approximation de π . Pour vous aider, je vous donne juste deux indications.

- Le cercle étant une forme géométrique qui vit dans un monde bidimensionnel, vous trouverez probablement utile de pouvoir considérer des valeurs aléatoires sur un plan. Voici un exemple de la manière dont les valeurs aléatoires peuvent être générées en deux dimensions. Si $X_1, X_2, \dots$ et $Y_1, Y_2, \dots$ sont des nombres aléatoires dans l'intervalle $[0, 1]$, alors la séquence de valeurs bidimensionnelles $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots$ contient des points uniformément aléatoires dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$. De même, nous pouvons créer des points aléatoires dans un cube $[0, 1]^3 \dots$
- La valeur π est contenue dans l'aire du cercle, le volume de la sphère, la longueur de la circonférence, l'aire de la surface de la sphère, Choisissez parmi ces quantités celle qui vous convient, faites-en une approximation à l'aide d'une méthode similaire à celle illustrée ci-dessus et extrayez une valeur approximative de π .

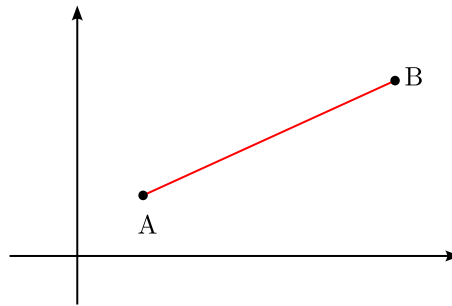
6 Géodésiques.

Soient A et B deux points dans un espace χ . La *géodésique* entre A et B est le chemin le plus court dans l'espace χ entre le point A et le point B.

Comme vous l'avez peut-être remarqué, la définition des géodésiques proposée ci-dessus est assez vague. Il y a une bonne raison à cela : selon l'espace χ et la mesure de longueur considérés, les géodésiques peuvent avoir des aspects très différents. Voyons quelques exemples à ce sujet.

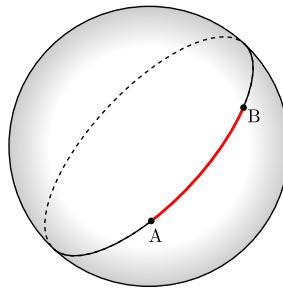
Géodésiques dans le plan cartésien

Dans le plan cartésien, c'est très simple. Le plus court chemin entre deux points A et B dans le plan cartésien χ est le segment entre A et B.

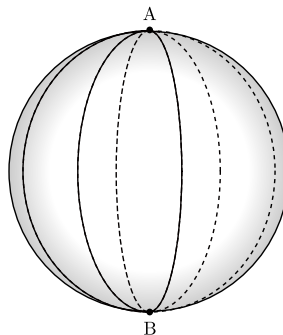


Géodésiques sur la sphère

Supposons que A et B soient deux points non antipodaux sur la sphère, qui est précisément notre espace χ . Construisons l'unique grand cercle (un cercle de rayon maximal, donc égal à celui de la sphère) qui passe entre ces deux points. On obtient ainsi deux arcs allant de A à B et on choisit le plus court : c'est la géodésique.



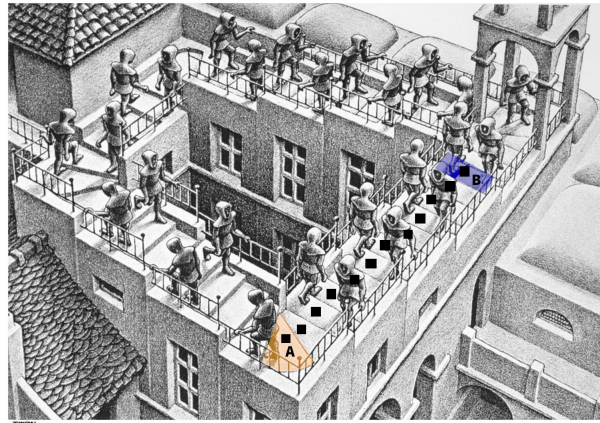
Si, par contre, A et B sont aux antipodes, il existe une infinité de grands cercles passant par A et B et donc une infinité de géodésiques : les arcs de toutes ces infinies géodésiques.



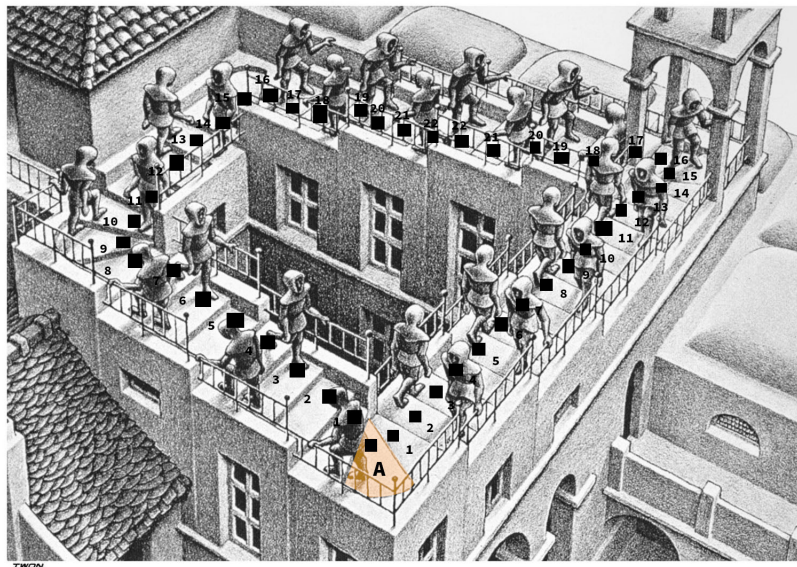
Géodésiques sur l'escalier d'Escher

Soit A et B deux marches de l'escalier d'Escher, que est notre espace χ , et que la distance qui les sépare soit le nombre minimum de pas à faire (un pas par marche) pour aller de l'une à l'autre.

Sur cette image, la géodésique entre les marches A et B est représentée. Elle a longueur: 11 marches.



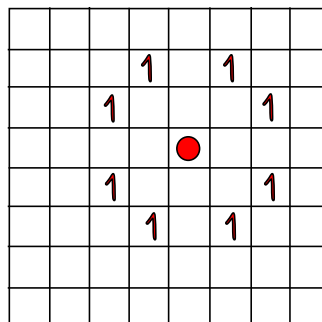
Sur cette image, j'ai fixé le point A et j'ai inscrit sur chaque marche le nombre de pas nécessaires pour s'y rendre à partir de A.



Géodésiques sur l'échiquier

On dessine un échiquier classique 8×8 et on place un cavalier en position centrale. On s'intéresse aux géodésiques du cavalier, c'est-à-dire aux chemins qui font le minimum de pas nécessaires au cavalier pour aller d'une case à l'autre. Les pas du cavalier sont de 2 dans un sens et de 1 dans l'autre.

- Complétez le schéma ci-dessous en inscrivant dans chaque case le nombre de pas nécessaires au cavalier pour l'atteindre.



● = position initiale du cavalier

- Une fois ce schéma réalisé, considérez n'importe quelle case de l'échiquier et reconstituez une géodésique (c'est-à-dire un chemin avec un nombre minimal de pas) empruntée par le cavalier pour s'y rendre.
- Combien de géodésiques existent entre la position initiale du cavalier et une case marquée 1 ?
- Combien de géodésiques existent entre la position initiale du cavalier et une case marquée 2 ?
- Combien de géodésiques existent entre la position initiale du cavalier et une case marquée 3 ?
- Dessinez un échiquier plus grand, faites le diagramme et répondez à la même question pour une case marquée 4, 5, ... etc. Faites une hypothèse sur le nombre de géodésiques existant entre la position initiale du cavalier et une case marquée $n \in \mathbb{N}$. Essayez de prouver cette hypothèse.

Passons maintenant aux généralisations.

Autres pièces de jeu.

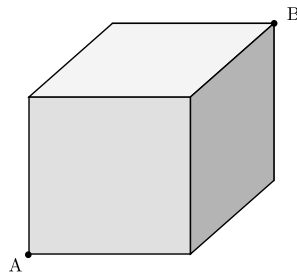
- Faites la même analyse pour les autres pièces du jeu : le roi, la reine, le fou noir, le fou blanc, la tour, le pion. Quelles sont les pièces qui peuvent atteindre chaque case de l'échiquier ? Lesquelles ne le peuvent pas ?
- En faisant la moyenne de tous les chiffres du diagramme pour chaque pièce, on obtient une mesure de la vitesse d'une pièce. Êtes-vous d'accord ? Si oui, faites-le et jugez qui est la pièce la plus rapide et la plus lente.

Des cavaliers différents.

- Supposons maintenant que le cavalier fasse un pas de 3 dans une direction et de 6 dans l'autre. Tracez le diagramme sur un échiquier suffisamment grand pour être sûr de ce qui se passe. Ce cavalier atteint-il toutes les cases de l'échiquier ?
- Prenons maintenant un cavalier qui se déplace de k dans une direction et de m dans l'autre. Quelle condition les nombres k et m doivent-ils remplir pour que le cavalier atteigne toutes les cases de l'échiquier ? Trouvez un critère et démontrez-le. Faites des dessins illustratifs.
- Pour les valeurs de k et m qui empêchent le cavalier d'aller partout, quelles sont les cases qu'il peut atteindre ? Quelles sont celles qu'il ne peut pas atteindre ? Trouvez un critère et démontrez-le. Faites des dessins illustratifs.

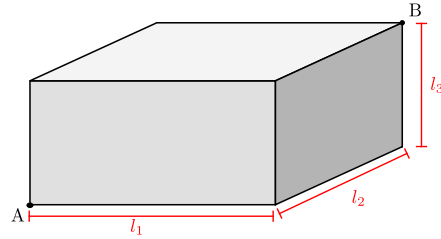
Géodésiques sur les solides

Voici votre sujet de recherche : les géodésiques sur les solides les plus célèbres. Commencez par le cube : trouvez la ou les géodésiques entre les vertices opposés, comme le montre le dessin ci-dessous. Quelle est leur longueur ?



Essayez maintenant de généraliser votre résultat : construisez la ou les géodésiques sur un cube de côté 1 entre deux points A et B quelconques.

Généralisez encore votre résultat : quelle est la géodésique entre les vertices opposés du parallélogramme droit de taille l_1, l_2, l_3 ? Qu'est-ce qui changerait si nous n'avions pas un parallélogramme droit mais un parallélogramme oblique ?



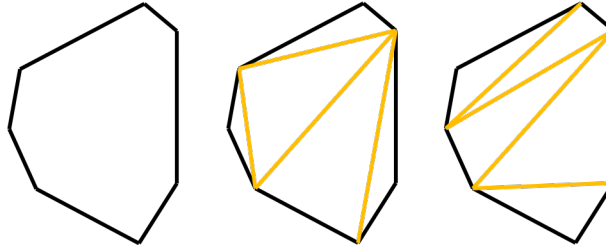
Vous voilà parti dans votre quête. Je vous recommande d'aller plus loin. Considérez un autre solide de Platon (vous souvenez-vous de ce que c'est ? sinon, faites une recherche) et construisez la géodésique entre toutes les paires de sommets de chaque solide de Platon. Combien y a-t-il de paires de sommets ? Quelles sont les longueurs de ces géodésiques ? À l'aide de papier ou de carton, construisez des modèles des solides de Platon sur lesquels vous avez tracé ces géodésiques.

7 Structures cachées partout.

7.1 Triangulations de polygones convexes.

Tout d'abord, clarifiez ce qu'est un polygone convexe. Connaissez-vous la définition générale de concavité/convexité ?

Voyons maintenant ce qu'est une triangulation. Considérez un polygone convexe quelconque, tel que le polygone à sept côtés du dessin. Une triangulation de polygone est la partition d'un polygone en un ensemble de triangles. Comme vous pouvez le voir sur le dessin, il peut y avoir plusieurs triangulations différentes pour un même polygone.



Vous devrez certainement vous familiariser avec cette nouvelle structure mathématique. Vous êtes libre de tester de nouvelles triangulations et de vous poser des questions. Voici quelques questions de compréhension.

- Est-il toujours possible de trianguler un polygone convexe ? Pourquoi ?
- Est-il toujours possible de trianguler un polygone quelconque ? Pourquoi ?
- Considérez un polygone convexe. Chaque triangulation a-t-elle le même nombre de triangles ? Qu'en est-il pour un polygone non convexe ? Justifiez vos réponses, donnez ces nombres de manière explicite ou trouvez des bornes supérieures/inférieures pour ces nombres.
- Considérez le nombre de triangulations différentes d'un polygone convexe à n côtés. Quelle est la relation entre ce nombre et le nombre de triangulations différentes du polygone régulier à n côtés ? Pourquoi ? Attention : considérez qu'un polygone est collé à un plan cartésien, c'est-à-dire qu'il n'est pas libre de tourner ou de se déplacer.
- Existe-t-il une relation entre le nombre de triangulations d'un polygone convexe régulier à n côtés et le nombre de triangulations de n'importe quel polygone à n côtés ? Si oui, laquelle ?
- Existe-t-il une relation entre le nombre de triangulations d'un polygone convexe à n côtés et le nombre de triangulations d'un polygone convexe à $n+1$ côtés ? Si oui, laquelle ?

Vous aurez certainement deviné que vous vous intéressez au nombre de triangulations d'un polygone convexe à n côtés. La question que vous vous posez est simplement : quel est le nombre de triangulations d'un polygone régulier à n côtés ?

Vous verrez qu'il n'est pas facile de répondre directement à cette question. Comme dans toute recherche mathématique, vous devriez commencer par calculer ce nombre à la main pour de petites valeurs de n . Ce faisant, vous ressentirez peut-être le besoin d'introduire une notation décrivant votre polygone et toutes les caractéristiques qui vous paraîtront particulièrement intéressantes. Faites-le, mais gardez à l'esprit qu'il est difficile de trouver une bonne notation qui ne soit pas trop lourde à manier : il est très probable que vous devrez revoir votre notation plus qu'une fois. Une bonne notation reflète une bonne compréhension, elle est complète mais concise au maximum.

Le dernier conseil que je vous donne est d'essayer de relier le nombre de triangulations d'un polygone à n côtés au nombre de triangulations de polygones à moins de n côtés.

ATTENTION : si vous parvenez à trouver une relation un à un entre les triangulations et des objets d'autres sections de cet atelier, vous pourrez transférer les résultats entre les deux !

7.2 Ordres de multiplication.

Supposons que vous vouliez multiplier 3 facteurs : disons par exemple que vous voulez calculer $2 \cdot 3 \cdot 5$. Grâce à l'associativité de la multiplication, vous sélectionnez successivement deux nombres voisins à multiplier ensemble, jusqu'à ce que vous obteniez le résultat. (Attention : vous ne changez pas l'ordre des facteurs !) Pour représenter ces précédences, vous mettez des parenthèses. Il y a exactement deux façons de mettre ces parenthèses : $(2 \cdot 3) \cdot 5$ et $2 \cdot (3 \cdot 5)$.

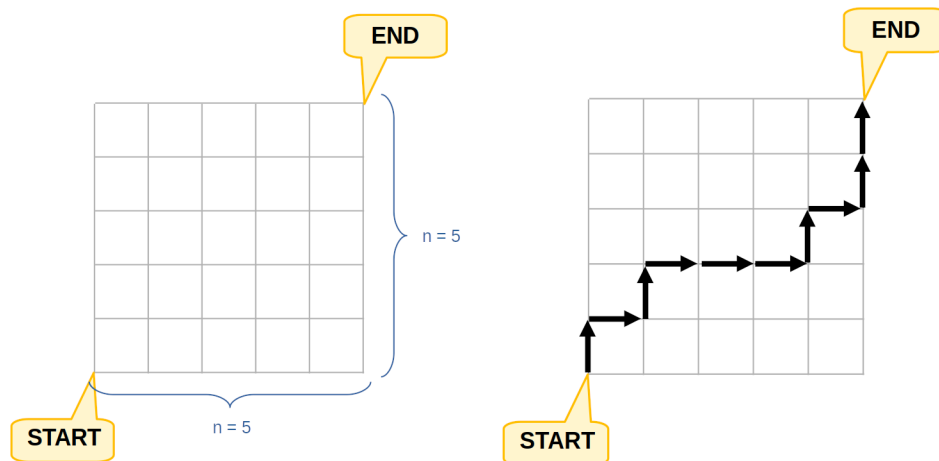
Voici l'objet de votre intérêt : le nombre de façons dont il est possible de parenthéser de cette façon une multiplication de n facteurs.

Je vous conseille d'utiliser la méthode de recherche suivante. Commencez par le calculer à la main pour les petites valeurs de n . Après avoir tenté de trouver une valeur explicite, vous pouvez aussi essayer de relier ce nombre (pour n facteurs) au nombre de façons dont il est possible de parenthéser des multiplications avec moins de facteurs (avec strictement moins de n facteurs).

ATTENTION : si vous parvenez à trouver une relation un à un entre les ordres de multiplication et des objets d'autres sections de cet atelier, vous pourrez transférer les résultats entre les deux !

7.3 Chemins sur une grille.

Supposez que vous marchez sur une grille carrée $n \times n$ allant du START, situé au coin sud-ouest, à END, situé au coin nord-est. Supposons que vous ne puissiez faire que des pas vers le nord ($\uparrow$) ou l'est ($\rightarrow$). Pour fixer les idées, sur le côté gauche du dessin ci-dessous se trouve une grille de 5×5 avec les points de START et END, et sur le côté droit un tel chemin.



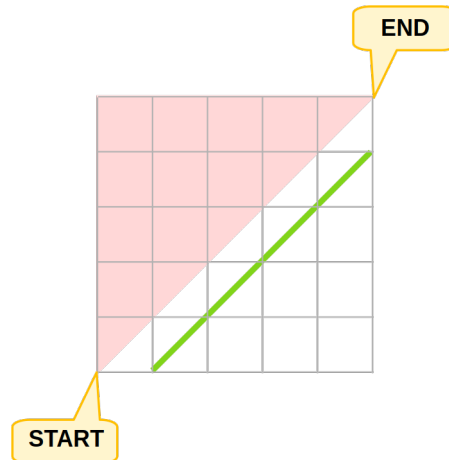
Dans le cadre d'une première étude de ce modèle, vous répondez aux questions suivantes.

- Combien existe-t-il de chemins de ce type dans une grille $n \times n$ pour $n = 1, 2$? Vous les énumérerez à la main et dessinerez ces chemins.
- Combien existe-t-il de chemins de ce type dans une grille $n \times n$ pour n quelconque?
- Combien existe-t-il de chemins de ce type dans une grille $n \times k$ pour n et k quelconque?

Vous vous intéressez maintenant à un type particulier d'itinéraires START-END : ceux contenus dans la moitié nord-ouest de la grille, surlignée en rose dans le dessin ci-dessous. Vous pouvez également caractériser ces chemins comme étant ceux qui ne touchent jamais la première diagonale inférieure, dessinée en vert.

Votre question est simplement la suivante : combien y a-t-il de chemins de ce type ? Comme toujours, je recommande de calculer ce nombre à la main pour les petites valeurs de n .

Ensuite, vous pouvez essayer de trouver ce numéro de manière explicite. Si vous le faites et que vous voulez un indice : il peut être plus facile de compter le nombre de mauvais chemins et de considérer comme point d'intérêt la première fois qu'un mauvais chemin touche la première diagonale inférieure.



Il est également possible d'établir un lien entre ce nombre et le nombre de chemins de ce type dans des grilles plus petites. Si vous essayez de trouver cette relation, je vous conseille de classer les chemins en fonction de la dernière (ou de la première) fois qu'ils touchent la diagonale principale.

ATTENTION : si vous parvenez à trouver une relation un à un entre les bons chemins et des objets d'autres sections de cet atelier, vous pourrez transférer les résultats entre les deux !

7.4 Des candidats étonnamment équilibrés.

Un village de $2n$ habitants doit élire un maire. Il y a deux candidats : Vera North et John East. L'improbable se produit : les candidats sont parfaitement à égalité, chacun ayant exactement n voix.

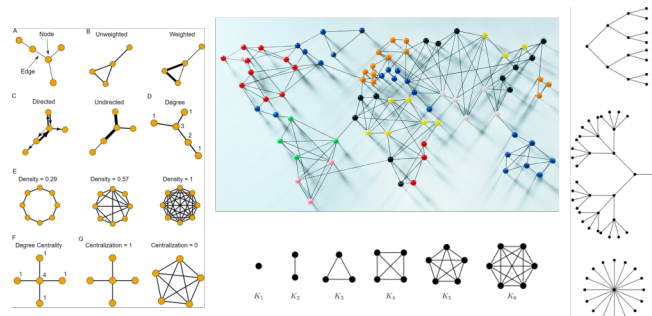
Au moment du scrutin, un opérateur sort un vote de l'urne à la fois et lit le nom à haute voix, créant ainsi une séquence de $2n$ votes. Vous vous intéressez aux séquences telles que, à tout moment de la lecture, Vera North apparaît toujours à égalité ou devant John West. Par exemple, dans un village de 4 habitants, les séquences NNEE et NENE présentent cette caractéristique, alors que les séquences EENN, NEEN, ENNE et ENEN ne la présentent pas.

Commencez maintenant votre travail de recherche. Décrivez en détail la ou les propriétés qui caractérisent ces séquences. Calculez ce nombre à la main pour de petites valeurs de n . Trouvez ce nombre de manière explicite ou essayez de le mettre en relation avec le nombre de séquences liées à des villages plus petits.

ATTENTION : si vous parvenez à trouver une relation un à un entre ces séquences et des objets d'autres sections de cet atelier, vous pourrez transférer les résultats entre les deux !

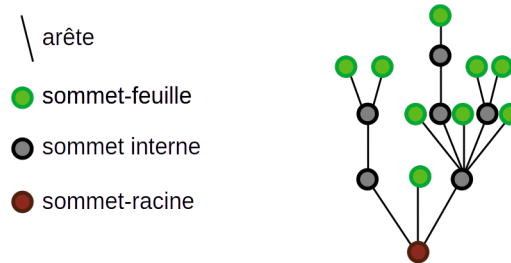
7.5 Arbres avec un nombre fixe d'arêtes.

Sans entrer dans une définition stricte, un graphe est un ensemble de sommets (que l'on peut imaginer comme des points), dont certains sont reliés entre eux par une ligne, appelées arêtes. La position exacte de ces points et de ces lignes ne nous intéresse pas. L'illustration ci-dessous présente différents graphes.

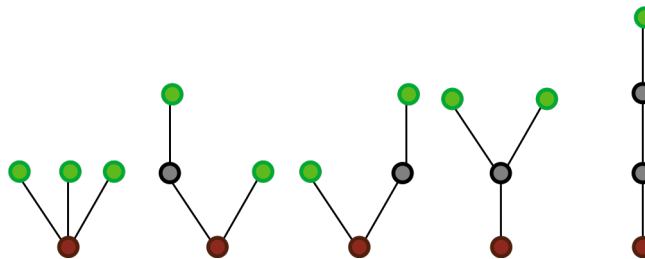


Vous allez étudier un type de graphe particulier : les arbres enracinés. Il s'agit de graphes présentant deux caractéristiques supplémentaires : ils ne contiennent pas de cycles (ou, de manière équivalente, il n'y a qu'un

seul chemin sur les arêtes possible pour aller d'un sommet à un autre) et l'un de leurs sommets est étiqueté comme étant la racine. En général, ils sont dessinés avec le sommet-racine en bas, à partir duquel toutes les arêtes se développent vers le haut : comme un véritable arbre. Les sommets situés à l'extrémité de l'arbre sont appelés feuilles : cette terminologie est représentée dans l'image ci-dessous.



Vous êtes intéressé par le nombre d'arbres enracinés ayant exactement n arêtes. Par exemple, il y a cinq arbres avec trois arêtes, comme vous le voyez dans l'exemple ci-dessous.



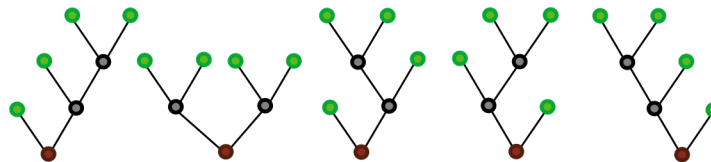
Commencez votre travail de recherche comme d'habitude. Calculez à la main ce nombre pour de petites valeurs de n , puis essayez de trouver ce nombre ou de le relier au nombre d'arbres ayant strictement moins de n arêtes.

ATTENTION : si vous parvenez à trouver une relation un à un entre les arbres à n arêtes et des objets d'autres sections de cet atelier, vous pourrez transférer les résultats entre les deux !

7.6 Arbres binaires avec un nombre fixe de feuilles.

La section précédente contient une introduction aux arbres en général : si vous ne l'avez pas encore lue, faites-le maintenant.

Vous allez maintenant étudier un type particulier d'arbre enraciné : l'arbre binaire enraciné. Ces arbres ont une caractéristique supplémentaire : chaque sommet qui n'est pas une feuille donne naissance à exactement deux nouveaux sommets. Vous vous intéressez au nombre d'arbres binaires enracinés qui ont exactement n feuilles. Par exemple, il y a exactement 5 arbres binaires enracinés avec 4 feuilles.

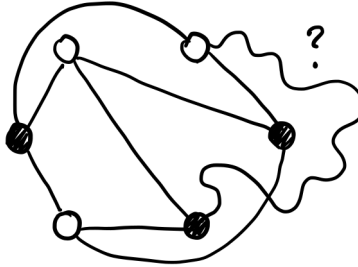


Commencez votre travail de recherche comme d'habitude. Calculez à la main ce nombre pour de petites valeurs de n , puis essayez de trouver ce nombre ou de le relier au nombre d'arbres binaires ayant strictement moins de n feuilles.

ATTENTION : si vous parvenez à trouver une relation un à un entre les arbres binaires à nombre fixe de feuilles et des objets d'autres sections de cet atelier, vous pourrez transférer les résultats entre les deux !

8 Un problème non résolu.

Je vais vous présenter un problème difficile qui n'a toujours pas été résolu par les mathématiciens. Le problème est le suivant.



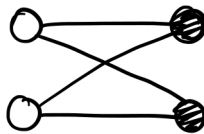
Vous êtes architecte et vous êtes chargé de construire une usine. Cette usine abrite $m \in \mathbb{N}$ machines produisant chacune un type de biscuit différent. En outre, l'usine a besoin de $s \in \mathbb{N}$ unités d'assemblage qui fusionnent ces biscuits en paquets multi-saveurs. Chaque machine doit livrer les biscuits à chaque unité d'assemblage par l'intermédiaire d'une bande de transport. Cependant, il est très compliqué et coûteux de fabriquer des bandes de transport qui se croisent, et vous essayez donc de l'éviter à tout prix. Voici donc la question.

Étant donné les nombres m et s , comment placer les machines, les unités d'assemblage et les bandes de transport de façon à ce que les bandes ne se croisent pas, ou, si elles doivent se croiser, de façon à ce que le nombre de croisements soit minimal ? Quel est alors ce nombre minimal de croisements ?

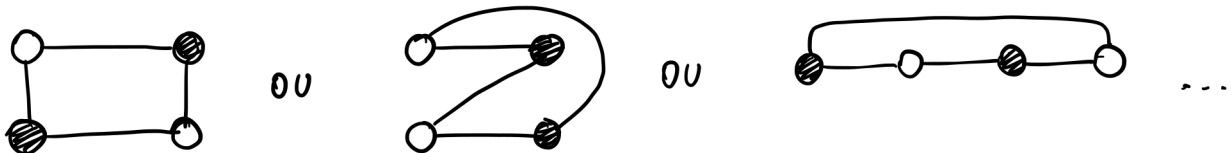
Par exemple, si vous disposez d'une machine et d'une unité d'assemblage, c'est facile.



Si vous avez 2 machines et 2 unités d'assemblage, cette configuration n'est pas optimale



Mais il est toujours possible de ne pas faire de croisements du tout :



Voici un guide pour commencer vos recherches. Bien entendu, vous êtes libre de ne pas le suivre et de suivre votre propre voie.

- Étudiez le cas spécifique où le nombre de machines est égal au nombre d'unités d'assemblage : $m = s = n$ pour de petites valeurs de $n = 1, 2, 3, 4$.
- Étudiez un autre cas spécifique, celui où $m = 1$ et $s = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$
- Qu'en est-il de $s = 1$ et $m = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$?

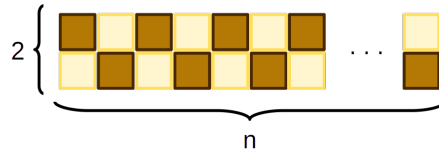
- Étudiez le cas $m = 2$ et $s = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$
- Étudiez le cas $m = 3$ et $s = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$
- Si vous fixez m et augmentez s , comment pensez-vous que le nombre minimal de croisements changera ? Formulez une hypothèse et essayez de la prouver. Attention : vous ne pouvez peut-être pas dire exactement de combien ce nombre augmente ou diminue, mais vous pouvez donner une borne supérieure à cette différence.
- Si vous inversez les valeurs de m et s , comment pensez-vous que la valeur des croisements minimaux change ? Formulez une hypothèse et justifiez-la.
- Faites un tableau contenant, pour chaque couple de valeurs de m et s , le nombre minimal de croisements que vous avez calculé jusqu'à présent et essayez de le remplir autant que possible.
- Essayez d'émettre une hypothèse sur le nombre minimal de croisements en fonction de m et s . Essayez de la prouver, au moins pour certaines valeurs spécifiques de m et s .

Remarques:

- Conservez un catalogue de tous les dessins que vous avez réalisés. Si nécessaire, commentez-les pour vous rappeler comment vous les avez construits. Gardez toujours un journal de toutes les idées que vous avez : elles peuvent être utiles plus tard, et il est facile de les oublier. Les notes que vous prenez pour vous-même doivent être compréhensibles par quelqu'un d'autre : après quelques semaines, vous serez un étranger à vos propres notes :-).
- Chaque fois que vous dessinez une image de machines m et d'unités d'assemblage s avec des croisements c , vous avez automatiquement prouvé que le nombre minimal de croisements pour les machines m et les unités d'assemblage s est plus petit que c .
- Chaque fois que vous dessinez une image de machines m et d'unités d'assemblage s avec des croisements c , vous avez automatiquement prouvé que le nombre minimal de croisements pour les machines m et les unités d'assemblage s est plus petit que c .
- Si vous parvenez à trouver un dessin sans croisements, vous avez prouvé que pour ce cas, le nombre minimal de croisements est 0.

9 Pavages de dominos.

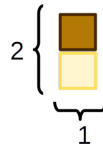
Supposons que vous ayez des échiquiers de taille $2 \times n$.



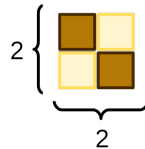
Vous souhaitez recouvrir les échiquiers entièrement de dominos. Bien évidemment, chaque pièce de domino couvre exactement deux cases adjacentes.

Vous vous demandez combien de façons différentes il est possible de couvrir l'ensemble de l'échiquier. Vous pouvez raisonner librement ou suivre le guide proposé.

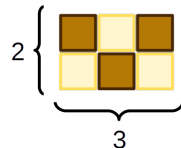
1. De combien de façons différentes peut-on couvrir l'échiquier de longueur 1 ?



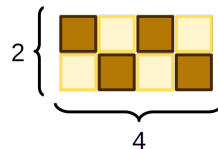
2. De combien de façons différentes peut-on couvrir l'échiquier de longueur 2 ?



3. De combien de façons différentes peut-on couvrir l'échiquier de longueur 3 ?



4. De combien de façons différentes peut-on couvrir l'échiquier de longueur 4 ?



5. En ce qui concerne l'échiquier de longueur 5, au lieu de compter toutes les possibilités, essayez de trouver le nombre de recouvrements possibles en commençant par ceux des échiquiers plus courts que vous avez déjà énumérés.
6. Appelons a_n le nombre de façons différentes de couvrir l'échiquier de longueur n . Raisonner maintenant de façon inductive. Supposez que vous connaissez a_1 , a_2 , ... et a_n : essayez alors de trouver a_{n+1} en fonction de a_1 , a_2 , ... et a_n . En utilisant cette relation, calculez a_n pour $n = 3, \dots, 10$. Reconnaissez-vous ces nombres ? Comment s'appelle la suite $(a_n)_n$?